

ビーム物理学入門

鎌田進^{*1}

タイプセット日付：2011年5月17日

^{*1} 電子メール：susumu.kamada@kek.jp

目次

第 1 章	ビームの概念と位相空間	3
1.1	ビームと位相空間	3
1.2	ビームの正準運動	5
1.3	ビームの線形運動	7
1.4	幾何光学の基礎と運動方程式	13
第 2 章	荷電粒子の正準運動	15
2.1	運動方程式	15
2.2	加速器構成要素	20
2.3	周回運動 I ベータatron振動	26
2.4	周回運動 II シンクロtron振動	33
第 3 章	シンクロtron放射の特性	44
3.1	シンクロtron放射計算の基礎	44
3.2	偏向磁石のシンクロtron放射	58
3.3	アンジュレータのシンクロtron放射	67
第 4 章	シンクロtron放射から決まる電子ビーム特性	79
4.1	電子ビーム特性に影響するシンクロtron放射	79
4.2	放射減衰	82
4.3	ビームの平衡分布	90
索引		98

第 1 章

ビームの概念と位相空間

一口にビームといってもその範囲は広く、このテキスト中で扱うビームの種類も常に一定のものではない。線形加速器のビーム、ビーム輸送路におけるビーム、円形加速器のビームそして電子ビーム、陽子ビーム、さらにはシンクロトロン放射光の様な光ビームなど様々なビームがある。

このような各種ビームには各々に特徴的な性格や取扱手法が存在する一方、ビーム一般として共通する性質や取扱手法も存在している。

特に位相空間 (phase space) を使ってビームを理解することの本質的重要性を理解して欲しい。

まず、次のようなビームの定義から出発しよう。

ビームとは、狭い空間領域に局在する 非常に多数の同種粒子の集まりが、 ほとんど同じ方向に向かって、 ほとんど同じ速さで進行しているもの。

円形加速器の中から一例を挙げよう、電子陽電子衝突型加速器 TRISTAN 主リングの 30GeV における電子ないし陽電子のビームの進行速度は光速の 99.99999985% で、その空間的広がり、電子と陽電子ビームがぶつかる衝突点で、進行方向の長さ約 2cm、水平幅約 600 μm 、垂直高さ約 16 μm であり、この内には約 2.5×10^{11} 個の電子または陽電子が集まっている。

ビームの進行速度、ビームサイズ、さらに含まれる粒子数は加速器の種類により、また同じ加速器でもビームエネルギーや運転条件によって異なる。またビームサイズについては加速器リング中の場所毎でも異なった値を持つものである。

1.1 ビームと位相空間

ビームを構成する個々の粒子の位置を横軸に、速度を縦軸にプロットしたものが位相空間を使ったビーム表現である。このように位相空間上の点集合としてビームを表す事の利

点は次のように明瞭である。

図 1.1 に示すのは実空間と位相空間におけるビーム表現の違いである。3次元の実空間上の表示では、空間内の同一点から出発した粒子が時間の経過とともに別々の場所に移動したり、逆に異なった場所にあった粒子が同一場所に集まったりする。このように粒子を表す初期の点集合からその後の運動を予測することができない。

一方、6次元位相空間では（図中では水平方向を表す x -方向のみ表示）、同一点から出発した粒子は時間の経過によっても常に同一点にあり、また異なる点から出発した粒子が同一点に至ることがない。

粒子の従う運動方程式は2階微分方程式であり、初期値としての位置と速度が決まればその後の運動は一意的に決定される。そのため位相空間上の同一点は運動によっても同一の点に至り、また異なる点が同一点に至ることもない。即ち位相空間上にビームを表現すれば、それはビーム運動の初期値に関する全情報を示したことになる、以後のビーム運動を予測することが可能になる。

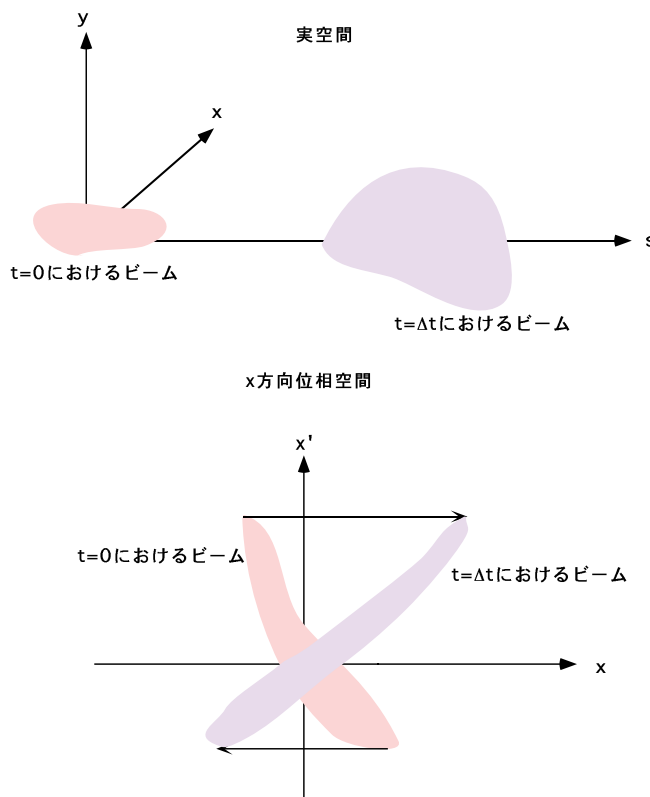


図 1.1 実空間と位相空間におけるビーム表現の違い

1.2 ビームの正準運動

このようにビームを構成する個々の粒子が同一の運動方程式で記述されるとき、言葉を換えれば同一 Hamiltonian に支配されるとき、ビーム運動は正準 (canonical) でありシンプレクティック (Symplectic) 条件*1を満たしている。「ビームが位相空間上に占める面積は運動によって変わらない。」と言う、一般に Liouville の定理として知られる、加速器ビームの性質はこのシンプレクティック条件の一部であり*2、この定理が成立する条件はビームが正準運動を行う条件と同一である。このテキストでは、第2章で正準運動の枠内のビーム運動を記述している。

しかしながら、実際のビームをとりまく環境は、より多彩な物理現象に満ちており正準運動として記述できない現象も起きる。それは例えば、ビーム内粒子間の相互散乱、残留ガスとの散乱、シンクロトロン放射による振動の減衰、シンクロトロン放射による振動の量子励起などである。これらの現象ではビームを構成する個々の粒子が確率的に運動に異なった影響を受け、それを同一 Hamiltonian で記述することはできない。このような非正準運動から生じる多くの重要な加速器ビーム特有の物理現象があることを知っておく必要がある。その中でも貯蔵型光源加速器にとって最も重要な一例として、シンクロトロン放射によるビーム運動の減衰と励起のダイナミクスについて第4章で学ぶ。

1.2.1 正準変換と Symplectic 条件

正準方程式で運動が記述される位相空間の点 η を考える。この運動方程式は次のような正準形式で書ける。

$$\dot{\eta} = S \frac{\partial H}{\partial \eta} \quad (1.1)$$

ここで正準形式に特有な行列 S は Symplectic 行列と呼ばれ、その要素は位相空間ベクトル η 要素の並べ方に依りて次のように与えられる。

$$\eta = \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \\ z \\ p_z \end{pmatrix} \text{ の時、} S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

*1 Hamilton 形式にもとづいた正準変換やシンプレクティック条件は非常に重要なテーマである。生出勝宣氏による「ビーム力学入門」JLC-FFIR92 研究会講義録・研究報告集、田内利明、山本昇編集、KEK Proceedings 93-6 (1993) がこの分野への最良の入門書であろう。

*2 後に (2.121) 式で Symplectic 条件の他の具体例が示される。

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \text{の時、} S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

さてこの $\boldsymbol{\eta}$ が次のような、正準変換に限らない、一般の変換を受けるとき、

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta}) \quad (1.4)$$

変換後の位相空間ベクトル $\boldsymbol{\zeta}$ の従う運動方程式は変換のヤコビアン M を使って次のように表現できる。

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = M \dot{\boldsymbol{\eta}} \quad (1.5)$$

変換のヤコビアン M の要素の具体的な形は以下である。

$$M_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} \quad (1.6)$$

変換後の $\boldsymbol{\zeta}$ の従う運動方程式 (1.5) に変換前の $\boldsymbol{\eta}$ の従う運動方程式 (1.1) を代入し、次の関係を適用することにより、

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial H}{\partial \zeta_j} \frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_i} \implies \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} = M^t \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \quad (1.7)$$

$\boldsymbol{\zeta}$ の運動方程式は次になる。

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = M S \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} = M S M^t \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \quad (1.8)$$

この運動方程式は明らかに、正準方程式 (1.1) とは形が異なり、正準形式ではない。これは施した変換 (1.4) が、正準変換に限らない、一般の変換だからである。運動方程式 (1.8) が正準形式となるには、変換のヤコビアンが次の条件を満たせばよく、これが Symplectic 条件と呼ばれるものである。

$$M S M^t = S \quad (1.9)$$

この Symplectic 条件は Symplectic 行列の性質 $S^2 = -I$ を使えば次の形と等価である。

$$M^t S M = S \quad (1.10)$$

1.2.2 Symplectic 条件を満たす転送行列

2行2列の転送行列 M が (1.9) や (1.10) に得た Symplectic 条件を満たす条件を具体的に見てみよう。

$$\begin{aligned}
 M^t S M &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & ad - bc \\ bc - ad & 0 \end{pmatrix} \\
 &= (\det M) S
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

即ち転送行列の行列式が1であるとき Symplectic 条件が満たされる。この条件は正準変換に於ける位相空間面積の保存を表している。ビームを構成する多数粒子の位相空間に於ける分布領域の面積はエミッタンスと呼ばれるが、全粒子が同一転送行列（より一般には同一ハミルトニアン）で記述される変換に際して、エミッタンスは保存される。このことをリウヴィルの定理と称している。

ここでは1自由度の場合を考えたため、Symplectic 条件から得られた条件は1個であったが、当然2ないし3自由度の場合には得られる条件の数が増える。計算機による粒子トラッキングでは、これらの Symplectic 条件が満足されていることを確認することにより、系統誤差の混入や非物理的な計算アルゴリズムの導入を避けることができる。

1.3 ビームの線形運動

位相空間の点集合として表現されたビームを追跡する最も簡便な方法が転送行列 (transfer matrix) の利用である。この方法が適用できる条件は運動方程式が線形であることないし線形近似が許されるときである。

そのため、粒子位置 $z \ll 1$ および粒子進行角度 $z' = p_z/p_s \ll 1$ を前提とした近似が可能のように、ビームの進行方向にできるだけ沿って座標系を選ぶ必要がある。この目的のために参照粒子の軌跡そのものを座標系として選ぶこともあるが、これ自身は必須条件ではない。

線形運動について学ぶことの重要性は、ビーム運動を考えるための枠組みを学ぶことに重なる。現実には存在しない理念型としての線形運動は、物理において質点や剛体という概念と同じ役割を有している。この基礎の上で、非線形運動について議論を展開することができる。非線形運動について定量的な議論をするには、SADを始めとする計算機コードで行う粒子トラッキングが不可欠である。

1.3.1 転送行列とビームの軌跡

線形の運動方程式に従う運動は一般に 2 つの線形独立解の重ね合わせで表わすことができる。

$$\text{コサイン型初期値} \quad \begin{cases} C(s_0, s_0) = 1 \\ C'(s_0, s_0) = 0 \end{cases} \quad \text{サイン型初期値} \quad \begin{cases} S(s_0, s_0) = 0 \\ S'(s_0, s_0) = 1 \end{cases} \quad (1.12)$$

特に線形独立解として (1.12) 式の初期条件により定義されたコサイン型軌跡 $C(s, s_0)$ とサイン型軌跡 $S(s, s_0)$ を使用すれば、任意の初期値から出発する軌跡を追跡する時、次式に示すように重ね合せの係数として軌跡の初期値自身 $z(s_0)$ および $z'(s_0)$ が使われる。

$$\begin{cases} z(s) = C(s, s_0) z(s_0) + S(s, s_0) z'(s_0) \\ z'(s) = C'(s, s_0) z(s_0) + S'(s, s_0) z'(s_0) \end{cases} \quad (1.13)$$

この様子を位相空間と実空間で図 1.2 に表した。

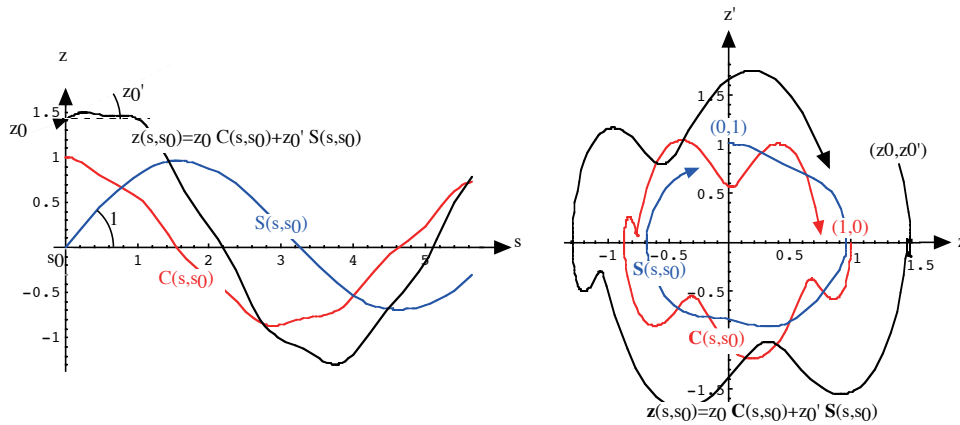


図 1.2 サイン型軌跡、コサイン型軌跡そして任意初期値の軌跡。上図は実空間、下図は位相空間に於ける記述。

(1.13) 式を行列表示で示す事で転送行列 $M(s, s_0)$ が定義される。

$$\mathbf{z}(s) \equiv \begin{pmatrix} z(s) \\ z'(s) \end{pmatrix} = M(s, s_0) \mathbf{z}(s_0) \quad (1.14)$$

ここで見るように転送行列 $M(s, s_0)$ の行列要素を求めることはコサイン型とサイン型の初期値 (1.12) 式に対する運動方程式の解を求めることに帰着する。

$$M(s, s_0) = \begin{pmatrix} C(s, s_0) & S(s, s_0) \\ C'(s, s_0) & S'(s, s_0) \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

1.3.2 転送行列の実例

幾何光学に於ける光線追跡に例を取り、図 1.3 に示す簡単な光学系について、具体的に転送行列の使い方を扱ってみよう。

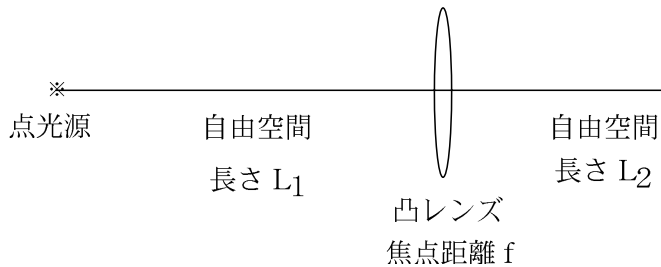


図 1.3 簡単な光学系。

長さ L の自由空間の転送行列は、

$$M_L = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

焦点距離 f の集束レンズの転送行列は、

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

発散レンズの場合は f の符号を負にとればよい。

例えば点光源からでる光の光線追跡を転送行列を使って行い、結像条件や拡大縮小率を求めることができる。

ここで点光源とは空間広がりが無限小かつ角度広がりが無限大（ということは $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ）の光源である。図 1.4 に示すように、光線の位置及び角度は、発光点に於ける位相空間で原点を通る垂直な直線で表される。これが自由空間そして凸レンズさらに再び自由空間によって変換される様子を位相空間上で表現してある。

この光学系全体での変換は、個々の光学要素の転送行列を使い次のように求められる。

$$M = \begin{pmatrix} 1 & L_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L_2}{f} & L_1 + L_2 - \frac{L_1 L_2}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{L_1}{f} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

点光源の結像条件は転送行列の (1,2)-成分がゼロになることは明らかで、この簡単な光学系の場合次のようになる。

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad (1.19)$$

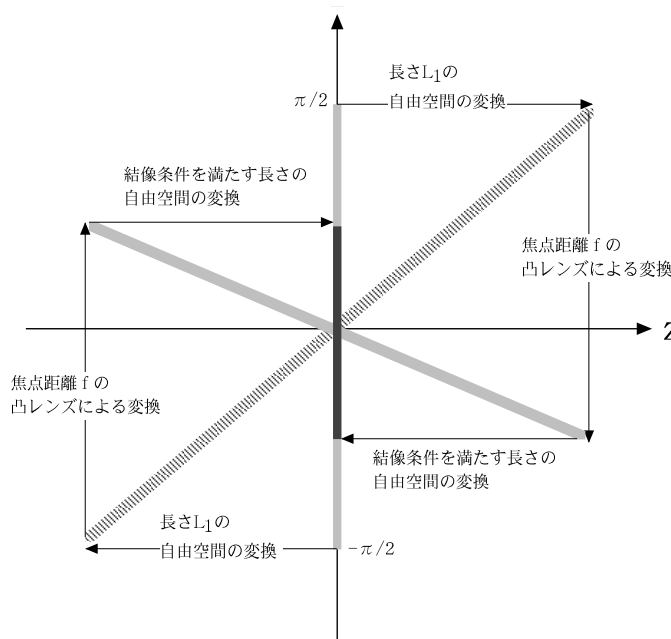


図 1.4 位相空間表現：点光源から出た光の結像。

また変換による像の倍率は 転送行列の (1, 1)-成分で与えられことも理解され、上記結像条件下では次のようになる。

$$M_{11} = -\frac{L_2}{L_1} \quad (1.20)$$

シンクロトロン放射光は超相対論的電子から放射される光で、電子の進行方向前方に鋭いピークを持ち角度広がり狭い。また電子ビーム自身、位相空間の中で固有の空間広がり一般にはそれと相関のある角度広がり有している。このように放射光ビームの位相空間分布は、電子ビーム広がり単一電子から放射される光ビーム広がりとの畳み込みとして与えられる。このように、放射光ビームの光源特性は点光源や点光源が空間的に分布した従来型光源とは本質的に異なる。そのために結像条件も、点光源の場合 (1.19) とは異なり、元々の光ビームの位相空間分布に依存した条件となる。

このことは放射光を結像させることで電子ビームサイズを計測しようとする場合に十分注意すべき点である。この問題については、後に??で詳細に検討する。

1.3.3 位相空間楕円の表示法

ここでビームの位相空間における分布としてしばしば登場する楕円の記述方法を導入しておく。

一般の楕円は面積 πW 、長短軸の長さ比率 a そして回転角 Ω によって特徴づけられる。そしてこの楕円上の一点は媒介変数 θ を使い (1.21) 式で与えられる。ここで $\mathbf{x}(\theta)$ が位

相空間上の位置を表すベクトルである。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\theta) &\equiv \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega \\ \sin \Omega & \cos \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{W} & 0 \\ 0 & \sqrt{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.21)$$

(1.21) 式を逆に解き、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{W}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{W}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}} & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega \\ -\sin \Omega & \cos \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \\ &\equiv T \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.22)$$

三角関数の関係式 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ を使って (1.22) から媒介変数 θ を消去することにより、位相空間楕円を表現する方程式が次のように表される。

$$\begin{aligned} 1 &= (T\mathbf{x})^t T\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^t \frac{1}{W} \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 \Omega}{a} + a \sin^2 \Omega & (\frac{1}{a} - a) \sin \Omega \cos \Omega \\ (\frac{1}{a} - a) \sin \Omega \cos \Omega & \frac{\sin^2 \Omega}{a} + a \cos^2 \Omega \end{pmatrix} \mathbf{x} \\ &\equiv \mathbf{x}^t \frac{1}{W} \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.23)$$

これをベクトル \mathbf{x} の成分を使って展開表現すれば、

$$W = \gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 \quad (1.24)$$

(1.23) で定義された係数 β 、 γ そして α は長短軸比率 a と回転角 Ω により決められるもので、当然、3つの係数同士は独立ではなく相互間に (1.25) 式の関係が存在する。

$$\beta\gamma = 1 + \alpha^2 \quad (1.25)$$

ここで導入した楕円表示の係数 β 、 γ そして α は周回運動における転送行列の行列要素およびベータatron振動の擬調和振動子解と深い関係にあり Twiss パラメータと呼ばれる。また特に係数 β はベータ関数ないし振幅関数とも呼ばれている。そのような物理的側面については後に学ぶ。

図 1.5 に位相空間の楕円の例を示す。これは (1.21) 式で $a = 3$ 、 $W = 1$ 、 $\Omega = \frac{\pi}{6}$ とした場合のものである。

1.3.4 楕円光源の結像条件

前に点光源の場合の結像条件を検討した図 1.3 の光学系に於いて、光源の性質が位相空間上の楕円で特徴付けられるとき、結像条件がどのようになるか考えてみよう。(1.18) で与えられた転送行列 M 自身は光源の性質によらない。発光点に於ける位相空間楕円の

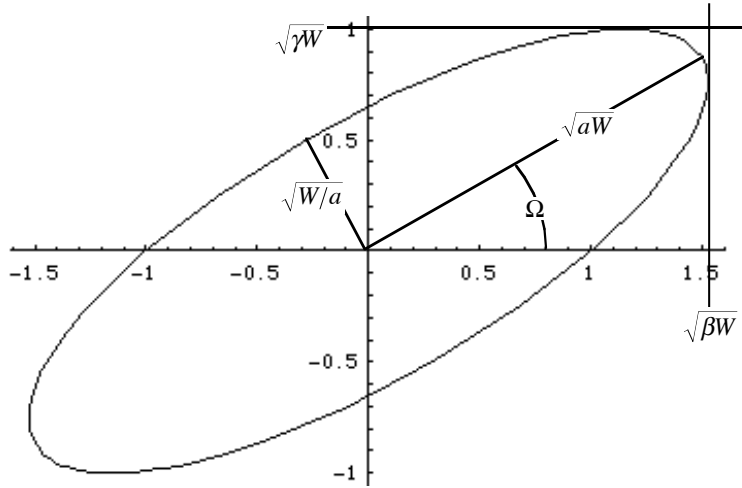


図 1.5 位相空間の楕円。

パラメータを β_1 、 γ_1 そして α_1 とすれば、発光点で楕円上にある点 \mathbf{x}_1 は次の方程式を満たす。

$$W = \mathbf{x}_1^t \begin{pmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_1 \quad (1.26)$$

この楕円上の点 \mathbf{x}_1 が転送行列 M により変換を受け $\mathbf{x}_2 = M\mathbf{x}_1$ に成った時どのような点に変換されるかを調べる。 $\mathbf{x}_1 = M^{-1}\mathbf{x}_2$ を (1.26) に代入すれば、

$$W = (M^{-1}\mathbf{x}_2)^t \begin{pmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} M^{-1}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2^t (M^{-1})^t \begin{pmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} M^{-1}\mathbf{x}_2 \quad (1.27)$$

これは楕円上の点の変換により新しい楕円上の点に移る事を示しており、新しい楕円のパラメータを β_2 、 γ_2 そして α_2 とすると、次の楕円パラメータの変換規則がこれらを決定している。

$$\begin{pmatrix} \gamma_2 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} = (M^{-1})^t \begin{pmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} M^{-1} \quad (1.28)$$

転送行列の成分を使って露わに新しい楕円のパラメータを書けば、次のようになる。

$$\begin{cases} \beta_2 = m_{11}^2\beta_1 - 2m_{11}m_{12}\alpha_1 + m_{12}^2\gamma_1 \\ \alpha_2 = -m_{11}m_{21}\beta_1 + (1 + 2m_{12}m_{21})\alpha_1 - m_{12}m_{22}\gamma_1 \\ \gamma_2 = m_{21}^2\beta_1 - 2m_{21}m_{22}\alpha_1 + m_{22}^2\gamma_1 \end{cases} \quad (1.29)$$

実空間の像サイズが極小となる結像位置では位相空間楕円は正立しているべきである、という幾何学的考察から $\alpha_2 = 0$ となることが結像条件である。具体的に転送行列 M の要素に (1.18) 式の値を代入して条件を求めれば結像条件 (1.30) 式に至る。しかしながらこの形は複雑でありあまり面白くない。ただ一般には、点光源の場合とは異なる結像条件である事に注意してほしい。特別な光源の例として点光源に近い場合を考えてみよう、すなわち正立した縦に非常に長い楕円光源である。このときの光源を表す楕円パラメ

ターは $\alpha_1 = 0$ かつ β_1 項は γ_1 項に比べて無視できる事で、当然のことながら、点光源と同じ結像条件 (1.19) となる事が (1.30) 式から読み取れる。

$$\begin{aligned} \alpha_1 \left(1 - 2\frac{L_1}{f} - 2\frac{L_2}{f} + 2\frac{L_1 L_2}{f^2} \right) + \beta_1 \left(\frac{1}{f} - \frac{L_2}{f^2} \right) \\ + \gamma_1 \left(\frac{L_1}{f} - 1 \right) \left(L_1 + L_2 - \frac{L_1 L_2}{f} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

1.4 幾何光学の基礎と運動方程式

光ビームが幾何光学で取り扱える時、何故、転送行列を使って光線追跡が出来るのだろうか？この基本的問題を正面から考えてみよう。波動としての光の場の成分 f は波動方程式に従う。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f = 0 \quad (1.31)$$

光の波動場の成分を次のように振幅項と位相項に分けて表す。

$$f = a e^{i\varphi} \quad (1.32)$$

ここで a が振幅を表し座標と時間の関数である。また φ はアイコナルと呼ばれる位相で、幾何光学が適用される時、非常に大きい値をとる。幾何光学適用の条件とは、振幅 a が変化する特徴的時間空間距離に比べ光の波長が無視できるほど短いとき ($\lambda \rightarrow 0$) である。このとき振幅が一定と見なせる時間空間範囲には非常に多数の振動の山や谷が存在していることになる。

アイコナルを次のように展開したとき、1次項の係数は光の波としての性質を表す量を与える。

$$\varphi = \varphi_0 + \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} + t \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (1.33)$$

即ち波数ベクトル \mathbf{k} と周波数 ω である。

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \equiv \text{grad} \varphi, \quad \omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (1.34)$$

(1.32) で書いた波動場の成分を波動方程式 (1.31) の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned} \square f = e^{i\varphi} \square a + i f \square \varphi + 2ie^{i\varphi} \left(\text{grad} \varphi \cdot \text{grad} a - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial a}{\partial t} \right) \\ - f \left\{ \text{grad} \varphi \cdot \text{grad} \varphi - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (1.35)$$

ここで \square はダランベール演算子と呼ばれ次式で定義される。

$$\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (1.36)$$

幾何光学が適用できるとき、(1.35) で支配的となる項は大きな量 φ に関して2次の右辺最終項であり、この項のみ取り入れることが幾何光学近似に相当する。このようにして得られる次の方程式はアイコナル方程式と呼ばれ幾何光学の基礎方程式である。

$$\text{grad}\varphi \cdot \text{grad}\varphi - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 = 0 \quad (1.37)$$

さて一方、電磁場中を運動する電荷 e 静止質量 m の粒子が従うハミルトン-ヤコビの運動方程式は次の形をしている。

$$\left(\text{grad}S - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\phi \right)^2 + m^2 c^2 = 0 \quad (1.38)$$

ここで c は光速、 S は作用、 \mathbf{A} はベクトルポテンシャル ϕ はスカラーポテンシャルを表している。運動量やハミルトニアンは作用から次のように導かれる。

$$\mathbf{p} = \text{grad}S \quad , \quad H = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (1.39)$$

物質粒子の従う運動方程式 (1.38) を電荷及び静止質量がゼロの粒子について考えると、アイコナル方程式 (1.37) と同じ形になることに気づくであろう。すなわち作用 S をアイコナル φ に対応させればよい。これによれば、(1.39) から波数ベクトル \mathbf{k} は運動量 \mathbf{p} に、振動数 ω はハミルトニアン H に対応することが分かる。そしてハミルトニアン H を使った物質粒子の正準運動方程式に対応して、振動数 ω をハミルトニアンとして使った光線の運動方程式が導かれる。

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{r}} \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} \quad (1.40)$$

以上の議論により幾何光学の適用範囲内において、光ビームの運動と物質粒子の運動を同じ方法で考えることの正当性が確立された。

第 2 章

荷電粒子の正準運動

まず荷電粒子の従う運動方程式を近似の無い一般的な形で求める。次に加速器やビーム輸送路によく用いられる主要加速器要素中のビーム運動の方程式を具体的に求める。その上で、よく使われる線形近似を導入する。

その準備の上で、円形加速器を念頭に置いて周期的条件下におけるビーム運動の安定性について学ぶ。ここでは、いわゆるベータトロン振動やシンクロトロン振動について学ぶことになる。このテキストの特徴として、ベータトロン振動とシンクロトロン振動を、転送行列を用いた定式化により、出来るだけ同一手法で取り扱う。

この章の取り扱い範囲では電子ビームと陽子ビームの差異は、現実的な加速エネルギー領域に於けるトランジションエネルギーの有無である。これは静止質量の違いから生じるものである。シンクロトロン放射の効果はここでは考慮されない。

2.1 運動方程式

ここでは荷電粒子の運動方程式を求める。便宜上、ここで求める運動方程式の独立変数は時間 t ではなくビームの運動方向に沿って設定される基準座標曲線上の弧長 s である。このために必要な変換は Frenet-Serret の公式を使って行われる。

2.1.1 座標系と Frenet-Serret の公式

粒子運動を記述するため使用する座標系は、図 2.1 に示す、独立変数 s と共に移動する座標系 $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_s)$ である。この座標の原点は、運動粒子から基準座標曲線 C に下した垂線の足の位置で定義され、粒子の運動に連れて移動する。曲線 C は、ビームの進む道筋に沿って設定された区分的に滑らかな曲線である。この曲線の設定方法は、たとえば理想的な粒子運動軌道に選んでもよいし、またビームから大きく離れない条件が満たされる限

り*1、運動方程式の解でなくてもよい。*2

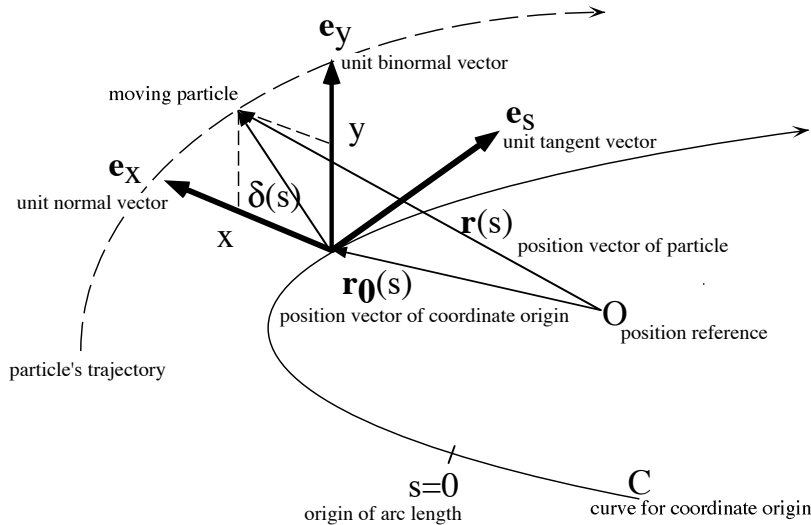


図 2.1 粒子運動を記述する座標系。

この座標系を使うと、運動粒子の位置 $\mathbf{r}(s(t))$ は次式のように分解された成分 (x, y) で記述される。

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \vec{\delta} = \mathbf{r}_0(t) + x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y \quad (2.1)$$

時間 t と基準座標曲線上の弧長 s との関数関係は、時間 t における粒子位置 $\mathbf{r}(t)$ から基準座標曲線 C に下した垂線の足の位置 $\mathbf{r}_0(t)$ を用いて次式により与えられる。

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\dot{\mathbf{r}}_0(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_0(t)} dt \quad (2.2)$$

ここで上付ドット $\dot{\mathbf{r}}$ は時間 t による微分 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ を表す、また a は運動粒子が弧長測定の原点を通過する時刻を示す。この関数関係を使って、運動粒子位置 \mathbf{r} や基準座標曲線 C 上の座標原点 $\mathbf{r}_0(t)$ を記述する独立変数を時間 t から弧長 s に変換できる。すなわち時間 t を (2.2) 式の逆関数 $t(s)$ により表してやれば、独立変数が弧長 s に変換される。

座標原点 $\mathbf{r}_0(t)$ を弧長 s で微分したものは、弧長と時間との関係 (2.2) 式により、単位長さの接線ベクトルである事が知れる。

$$\mathbf{r}'_0 \equiv \dot{\mathbf{r}}_0 \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\mathbf{r}}_0}{\sqrt{\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0}} \equiv \mathbf{e}_s \quad (2.3)$$

以後弧長 s による微分を上付プライム'で表すことにする。

*1 この条件は線形近似をする時に必要である。計算機シミュレーションの中などで充分高次の項まで含んだ取り扱いに終始するなら粒子位置が一意的に記述できればよいことになる。

*2 例えば、アンジュレータ内のビーム運動の記述に使う基準座標曲線としては、運動方程式を満たすサイン関数よりも、満たさない直線のほうが一般には便利であろう。

単位接線ベクトルの内積は定数故、 s で微分をすればゼロとなる。これより \mathbf{r}_0'' は単位接線ベクトルに直交する事が知られ、これを曲率と呼ばれる $\kappa \equiv \sqrt{\mathbf{r}_0'' \cdot \mathbf{r}_0''}$ で次のように正規化したものが単位法線ベクトル \mathbf{e}_x と呼ばれる。

$$\mathbf{e}_x \equiv -\frac{\mathbf{r}_0''}{\kappa} \quad (2.4)$$

さらに互いに直交する接線ベクトルと法線ベクトルの外積から単位従法線ベクトルが次のように定義される。

$$\mathbf{e}_y \equiv \mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_x \quad (2.5)$$

このように定義された直交座標系 $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_s)$ は右手系を成す。この座標系は座標原点の動きに連れ移動する座標系であり、この変化の様子を(2.6)式に示すFrenet-Serretの公式が記述する。

$$\begin{cases} \mathbf{e}_s \equiv \frac{d}{ds} \mathbf{r}_0(s) = \mathbf{r}_0'(s) \\ \mathbf{e}_x' = -\tau \mathbf{e}_y + \kappa \mathbf{e}_s \\ \mathbf{e}_y' = \tau \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_s' = -\kappa \mathbf{e}_x \end{cases} \quad (2.6)$$

ここで κ と τ は基準座標曲線を選ぶことで決まる量で、各々基準座標曲線の幾何学的な曲率とねじれ率に対応している。

以下にFrenet-Serretの公式を導いて置こう。まず、単位接線ベクトルの微分は、(2.3)式および(2.4)式の定義からFrenet-Serret(2.6)第4式となることが直ちに知れる。

次に単位従法線ベクトルの定義式(2.5)の微分を考えると、第1項は平行なベクトル間の外積故にゼロとなり、単位接線ベクトルに直交していることが示される。

$$\mathbf{e}_y' = \mathbf{e}_s' \times \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_x' = \mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_x' \quad (2.7)$$

さらに \mathbf{e}_y の内積の微分がゼロであることから、 \mathbf{e}_y' は単位従法線ベクトルとも直交しており、単位法線ベクトルに平行でFrenet-Serret(2.6)第3式に書ける事が示される。

最後に、単位法線ベクトル \mathbf{e}_x の微分は、前と同様に内積の微分がゼロであることから、単位法線ベクトルに直交しており次式に書ける。

$$\mathbf{e}_x' = a\mathbf{e}_y + b\mathbf{e}_s \quad (2.8)$$

係数 a と b を決めるには、それぞれ上式と \mathbf{e}_y および \mathbf{e}_s との内積を計算すればよい。

$$a = \mathbf{e}_x' \cdot \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y' = -\tau \quad (2.9)$$

$$b = \mathbf{e}_x' \cdot \mathbf{e}_s = -\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_s' = \kappa \quad (2.10)$$

これらを(2.8)式に代入することでFrenet-Serret(2.6)第2式を得る。

以下の議論では常にねじれ率 $\tau = 0$ を前提^{*3}とする。

2.1.2 運動方程式

よく知られるように電荷 q を有する荷電粒子は電磁場中で Lorentz 力を受け (2.11) 式の運動方程式に従って運動する。

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \dot{\mathbf{p}} = q\{\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\} \quad (2.11)$$

ここで \mathbf{p} は粒子の運動量、 \mathbf{v} は速度、 \mathbf{E} は電界強度、 \mathbf{B} は磁束密度である。さらに電場が存在しない場合には運動方程式は次のように簡単になる。

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \quad (2.12)$$

ここで m は運動粒子の質量で、静止質量 m_0 と相対論係数 γ との積で表わされる。

(2.1) 式によって粒子位置を表わし、(2.12) 式の運動方程式に代入しよう。このとき位置ベクトル \mathbf{r} の時間 t による微分を弧長 s による微分で置き換えるようにする。

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}' \frac{ds}{dt} = \{r'_0 + (x\mathbf{e}_x)' + (y\mathbf{e}_y)'\} \dot{s} = \{x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y + (1 + \kappa x)\mathbf{e}_s\} \dot{s} \quad (2.13)$$

ここでは Frenet-Serret の公式 (2.6) 式を使って座標ベクトルの微分を展開して表した。同様に、時間による2階微分は次の様に表される。

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{r}'' \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mathbf{r}' \frac{d^2s}{dt^2} \\ &= [\{x'' - \kappa(1 + \kappa x)\} \dot{s}^2 + x' \ddot{s}] \mathbf{e}_x \\ &\quad + (y'' \dot{s}^2 + y' \ddot{s}) \mathbf{e}_y \\ &\quad + \{(2\kappa x' + \kappa' x) \dot{s}^2 + (1 + \kappa x) \ddot{s}\} \mathbf{e}_s \end{aligned} \quad (2.14)$$

ここに求めた $\ddot{\mathbf{r}}$ を運動方程式 (2.12) 式の左辺に、さらに右辺には (2.13) 式の $\dot{\mathbf{r}}$ と次のように成分表示した磁場とを代入することにより、

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_s \mathbf{e}_s \quad (2.15)$$

弧長 s を独立変数とする運動方程式の成分表示 (2.16) 式を得る。

$$\begin{cases} x'' + \frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} x' - \kappa(1 + \kappa x) &= \frac{q}{m\dot{s}} \{y' B_s - (1 + \kappa x) B_y\} \\ y'' + \frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} y' &= \frac{q}{m\dot{s}} \{(1 + \kappa x) B_x - x' B_s\} \\ 2\kappa x' + \kappa' x + \frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} (1 + \kappa x) &= \frac{q}{m\dot{s}} (x' B_y - y' B_x) \end{cases} \quad (2.16)$$

^{*3} この前提によりねじれ率のある粒子軌道を扱えなくなる訳ではない。基準座標曲線としてはねじれ率がゼロのものを使い、この上でねじれ率のある粒子運動も記述しようということである。

磁場中を運動する荷電粒子の運動エネルギー保存則に対応して、上記運動方程式の第3式は解析的に解ける。すなわち第1式の両辺に x' 、第2式の両辺に y' を掛けて両式の和をとると B_s 項が消去された次式になる。

$$x'x'' + y'y'' + \frac{\dot{s}}{s^2} (x'^2 + y'^2) - \kappa(1 + \kappa x)x' = \frac{q}{m\dot{s}}(1 + \kappa x)(y'B_x - x'B_y) \quad (2.17)$$

(2.17) 式右辺の磁場の項は (2.16) 式の第3式右辺と同じ形なので消去することができ、磁場の項を含まない (2.18) 式を得る。

$$\begin{aligned} -\frac{\ddot{s}}{s^2} &= \frac{x'x'' + y'y'' + (1 + \kappa x)(\kappa x' + \kappa' x)}{x'^2 + y'^2 + (1 + \kappa x)^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{ds} \{x'^2 + y'^2 + (1 + \kappa x)^2\}}{x'^2 + y'^2 + (1 + \kappa x)^2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

上の式は $g \equiv x'^2 + y'^2 + (1 + \kappa x)^2$ と置くことで次の様に簡単化され、

$$-\frac{\ddot{s}}{s^2} = \frac{g'}{2g} = \frac{\dot{g} \frac{dt}{ds}}{2g} = \frac{\dot{g}}{2g\dot{s}} \quad (2.19)$$

これを通分することで積分のできる形である事が見通せる。

$$2g\dot{s}\ddot{s} + \dot{g}\dot{s}^2 = \frac{d}{dt} (g\dot{s}^2) = 0 \quad (2.20)$$

この積分の実行により運動方程式 (2.16) 第3式は解け、時間 t と弧長 s の関係が明示的に与えられる。

$$\dot{s}^2 = \frac{v^2}{x'^2 + y'^2 + (1 + \kappa x)^2} \quad (2.21)$$

この結果の物理的解釈をすれば、磁場の働きが粒子の速さを変えない事そして積分定数 v は粒子速度に対応する事が理解される。この結果を運動方程式第1式、第2式に代入すれば、横方向運動の運動方程式を得る。

$$\left\{ \begin{aligned} x'' - \frac{2\kappa x' + \kappa' x}{1 + \kappa x} x' - \kappa(1 + \kappa x) \\ &= \frac{q}{mv} \sqrt{x'^2 + y'^2 + (1 + \kappa x)^2} \left[\frac{x'y'}{1 + \kappa x} B_x - \left(1 + \kappa x + \frac{x'^2}{1 + \kappa x}\right) B_y + y'B_s \right] \\ y'' - \frac{2\kappa x' + \kappa' x}{1 + \kappa x} y' \\ &= \frac{q}{mv} \sqrt{x'^2 + y'^2 + (1 + \kappa x)^2} \left[\left(1 + \kappa x + \frac{y'^2}{1 + \kappa x}\right) B_x - \frac{x'y'}{1 + \kappa x} B_y - x'B_s \right] \end{aligned} \right. \quad (2.22)$$

ここに得られた結果は厳密なもので (2.22) 式はベータトロン振動 (横方向振動) の運動方程式であり、(2.21) 式はベータトロン振動解に応じて決まるシンクロトロン振動 (進行方向の振動) の解^{*4}である。これらは数値計算に依る粒子追跡の基礎を成しているが、一方解析的な取り扱いの為には今後何らかの近似を導入することになる。

^{*4} ここでは磁場のみが考慮され、シンクロトロン振動に不可欠な (高周波加速) 電磁場の効果が含まれていない。この取り扱い範囲では振動運動には至らず、後に見るように電磁場の効果を考慮して始めて真のシンクロトロン振動が記述される。

2.2 加速器構成要素

ここでは、前のセクションで求めた運動方程式を特定の主要加速器要素ごとに書き下し、その線形近似条件による解から各加速器要素の転送行列を求める。

2.2.1 自由空間

ドリフト空間 (drift space) と呼ばれる電磁場の無い空間である。この場合、基準座標曲線は曲率 $\kappa = 0$ の直線に選ぶのが自然である。

磁場条件は当然、

$$B_x = B_y = B_s = 0 \quad (2.23)$$

そして運動方程式は次のようになる。

$$\begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = 0 \\ \dot{s}^2 = \frac{v^2}{x'^2 + y'^2 + 1} \end{cases} \quad (2.24)$$

これは厳密に解ける。積分を実行すれば、

$$\begin{cases} x = x'_0 s + x_0 \\ y = y'_0 s + y_0 \\ s = \frac{v}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + 1}} t + s_0 \end{cases} \quad (2.25)$$

参照運動量 p_0 の粒子の速さを v_0 とすると、運動量が Δp 大きい粒子の速さ v は次式で与えられる。

$$v \approx v_0 + \frac{dv}{d(\Delta p/p_0)} \frac{\Delta p}{p_0} = v_0 \left(1 + \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{\Delta p}{p_0} \right) \quad (2.26)$$

ここで γ_0 は参照運動量粒子の相対論係数である。

粒子がその静止質量に比べて非常に高いエネルギーを有するとき、速度は殆ど光速に達し運動量の違いによる速度差は極めて小さい。このように速度差が無視できるほど高エネルギー領域にある粒子のことを超相対論的粒子と呼ぶ。静止質量が小さいため多くの電子加速器でこの条件が満たされている。

2.2.2 4極磁石

水平および垂直方向で各々収束および発散の効果を持つ磁石である。便宜上、水平方向に収束作用があるとき（垂直方向は発散作用だが）収束磁石 (focusing magnet) と、水平方向に発散作用を持つとき（垂直方向は収束作用だが）発散磁石 (defocusing magnet)

と呼び分けられている。ビームが設計の上で磁石の中心付近を通る限り、基準座標曲線は自由空間と同じく曲率 $\kappa = 0$ の直線を選ぶのが自然である。

磁場条件は、

$$\begin{cases} B_x = \frac{\partial B_x}{\partial y} \Big|_{x=y=0} y = b_1 y \\ B_y = \frac{\partial B_y}{\partial x} \Big|_{x=y=0} x = b_1 x \\ B_s = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

運動方程式は、

$$\begin{cases} x'' = \frac{qb_1}{mv} \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1} \{x' y' y - (1 + x'^2) x\} \\ y'' = \frac{qb_1}{mv} \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1} \{(1 + y'^2) y - x' y' x\} \\ \dot{s}^2 = \frac{v^2}{x'^2 + y'^2 + 1} \end{cases} \quad (2.28)$$

線形近似を施した運動方程式、

$$\begin{cases} x'' = -\frac{qb_1}{mv} x \\ y'' = \frac{qb_1}{mv} y \\ \dot{s} = v \end{cases} \quad (2.29)$$

参照運動量より Δp 運動量が多い粒子の従う運動方程式は (2.26) 式および (2.30) 式を (2.29) 式に代入することで (2.31) 式に与えられる。

$$\frac{1}{mv} = \frac{1}{p} = \frac{1}{p_0 + \Delta p} \approx \frac{1}{p_0} \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right) \quad (2.30)$$

$$\begin{cases} x'' = -K_1 \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right) x \\ y'' = K_1 \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right) y \\ \dot{s} = v_0 \left(1 + \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{\Delta p}{p_0}\right) \end{cases} \quad (2.31)$$

ここで K_1 は次式で定義されている。

$$K_1 = \frac{qb_1}{p_0} \quad (2.32)$$

2.2.3 2極磁石

偏向磁石 (bending magnet) とも言われ、ビーム軌道を曲げる役割を担う。基準座標曲線は参照運動量粒子の軌跡に沿ったものを選ぶのが一般であろう。すなわち曲率 $\kappa = 1/\rho_0$ の曲線を基準座標曲線に選ぶ、ここで ρ_0 は参照運動量粒子の曲率半径である。

水平方向偏向磁石の場合の磁場条件は、

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = b_0 \\ B_s = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

運動方程式は、

$$\begin{cases} x'' - \frac{2\frac{1}{\rho_0}x'}{1+\frac{1}{\rho_0}x}x' - \frac{1}{\rho_0}\left(1 + \frac{1}{\rho_0}x\right) \\ \quad = \frac{qb_0}{mv}\sqrt{x'^2 + y'^2 + \left(1 + \frac{1}{\rho_0}x\right)^2} \left\{ -\left(1 + \frac{1}{\rho_0}x + \frac{x'^2}{1+\frac{1}{\rho_0}x}\right) \right\} \\ y'' - \frac{2\frac{1}{\rho_0}x'}{1+\frac{1}{\rho_0}x}y' = \frac{qb_0}{mv}\sqrt{x'^2 + y'^2 + \left(1 + \frac{1}{\rho_0}x\right)^2} \left(-\frac{x'y'}{1+\frac{1}{\rho_0}x}\right) \\ \dot{s}^2 = \frac{v^2}{x'^2 + y'^2 + \left(1 + \frac{1}{\rho_0}x\right)^2} \end{cases} \quad (2.34)$$

線形近似を施した運動方程式、

$$\begin{cases} x'' = \frac{-qb_0}{mv}\left(1 + \frac{2x}{\rho_0}\right) + \frac{1}{\rho_0}\left(1 + \frac{x}{\rho_0}\right) \\ y'' = 0 \\ \dot{s} = v\left(1 - \frac{1}{\rho_0}x\right) \end{cases} \quad (2.35)$$

参照運動量粒子の運動量 p_0 、2極磁場強度 b_0 そして曲率半径 ρ_0 との間には (2.36) 式の関係がある。

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{qb_0}{p_0} \quad (2.36)$$

そこで線形近似を施した参照運動量粒子の運動方程式は (2.37) 式となる。

$$\begin{cases} x'' = -\frac{x}{\rho_0^2} \\ y'' = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

線形近似を施した運動方程式 (2.35) 式中の速度 v と運動量の逆数 $1/mv$ に、それぞれ (2.26) 式と (2.30) 式による、運動量のずれ Δp に関する線形近似表現を代入することで運動量が Δp 大きい粒子の従う運動方程式を作ることができる。

$$\begin{cases} x'' = -\frac{x}{\rho_0^2} + \frac{1}{\rho_0}\left(1 + \frac{2x}{\rho_0}\right)\frac{\Delta p}{p_0} \approx -\frac{x}{\rho_0^2} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\Delta p}{p_0} \\ y'' = 0 \\ \dot{s} = v_0\left(1 + \frac{1}{\gamma_0^2}\frac{\Delta p}{p_0}\right)\left(1 - \frac{1}{\rho_0}x\right) \approx v_0\left(1 + \frac{1}{\gamma_0^2}\frac{\Delta p}{p_0} - \frac{x}{\rho_0}\right) \end{cases} \quad (2.38)$$

2.2.4 端部効果

(2.37) 式に見るように、水平偏向磁石では水平方向の運動に収束力が生じている。実際の加速器で水平収束力がこのままに現れるのは、磁石端部でビームが垂直に入出射する扇形磁石（セクター型磁石）の場合である。矩形磁石の様にビームの入射および出射角が 90° から外れる場合は、垂直方向の収束力が生じるなど、ここに示された運動方程式と異なる運動をする。この効果は端部効果（edge effect）あるいは楔形効果（wedge effect）といわれる。

矩形磁石に例を取り端部効果の発生理由を見てみよう。図 2.2 に示すように、偏向磁石中の運動を記述する基準座標曲線は円弧で両外側の自由空間中の運動を記述する基準座標曲線は直線である。ところが磁石の入り口付近には、偏向磁石中に在っても内寄りに運動する粒子の場合垂線の足が直線に下りる楔形領域が存在する。逆に自由空間中に在っても外寄りに運動する粒子の垂線の足が円弧に下りる楔形領域も存在している。セクター磁石ではこのような楔形領域は存在しない。この楔形領域の影響を考慮することで端部効果が理解され、その効果を計算することができる。

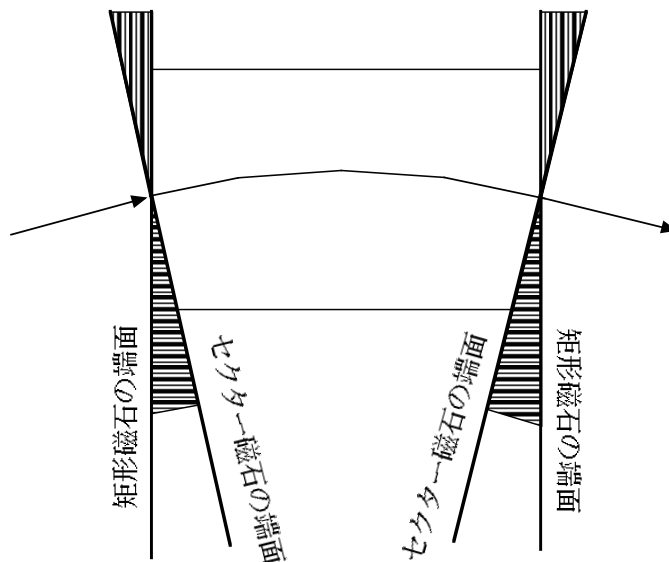


図 2.2 セクター磁石と矩形磁石による端部効果の差。

このほかに磁石端部付近のようにビーム進行方向に沿って横方向の磁場が変化する場所ではフリンジ場効果と呼ぶ現象が生じる^{*5}。このような場所では必ず付随して進行方向の磁場も発生するために起こるもので、正しく Maxwell の方程式を満たすフリンジ場を求め運動方程式に取り入れることで影響を評価できる。フリンジ場効果は 2 極磁石以外の磁石でも存在する。計算機による粒子追跡コードではこの効果を取り入れることができ、

*5 一般には、端部効果とフリンジ場効果とは、言葉の用法上、常に区別して使われている訳ではない。

ビーム運動に重要な影響を与える場合も知られている*6。

2.2.5 高周波加速空洞

直線加速器やシンクロトロンに於けるビーム加速や、貯蔵型リングに於ける放射エネルギー損失の補給という役割を担うのが高周波加速空洞である。ここでは簡単化のため高周波の時間変化は単一周波数のサイン関数とし、また加速空洞の長さはゼロとしておく。空洞長が大きい場合には、運動粒子の通過に時間を要し途中で高周波位相が変化する効果を考慮しなければならない。

ピーク電圧 \hat{V}_{RF} 、高周波角周波数 ω_{RF} の加速空洞に、時刻 t に発生している加速電圧 $V_{RF}(t)$ は (2.39) 式に書ける*7。

$$V_{RF}(t) = \hat{V}_{RF} \cos(\omega_{RF}t + \phi) \quad (2.39)$$

このとき加速電場の時間勾配は次式になる。

$$\dot{V}_{RF}(t) = -\hat{V}_{RF}\omega_{RF} \sin(\omega_{RF}t + \phi) \quad (2.40)$$

この加速空洞に電荷 q の荷電粒子が、基準時刻 t_0 より時間 τ だけ早い時刻 $t = t_0 - \tau$ に到達する際に、粒子が得るエネルギー ΔE は高周波電圧の時間的変化を線形近似で表すことにより (2.41) 式で与えられる。

$$\Delta E = qV_{RF}(t) \approx q \left\{ V_{RF}(t_0) - \tau \dot{V}_{RF}(t_0) \right\} \quad (2.41)$$

相対論的運動学によれば、このとき粒子の運動量増加は (2.42) 式に示される。

$$\Delta p = \frac{1}{v} \Delta E \quad (2.42)$$

ここで v は運動粒子の速度である。

2.2.6 線形近似解と転送行列

参照運動量粒子の線形運動方程式は、自由空間、2極磁石そして4極磁石について (2.43) 式の形にまとめて記述できる。

$$z'' = K(s)z \quad (2.43)$$

ここで z は水平方向 x 、垂直方向 y の内いずれかを代表するものとする。また今までに紹介した加速器要素について $K(s)$ は次のように定義されている。

$$K(s) = \begin{cases} -\frac{qb_1}{p_0} - \left(\frac{qb_0}{p_0}\right)^2 \\ \frac{qb_1}{p_0} \end{cases} \quad (2.44)$$

*6 例えば、KEKBや北京のBTCF衝突型加速器計画では、フリンジ場効果が粒子の安定運動領域 (dynamic aperture) を制限する上で大きな影響を及ぼしている。これはSADコードによる計算で明らかになった。

*7 此处で言う電圧とは、加速空洞を通過する粒子の軌道に沿った電界強度の積分である。時間的に変動する電界のため、一般には通過に要する時間の影響を受ける。

(2.44) 式の b_0 および b_1 は、自由空間では、

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0 \quad (2.45)$$

2極磁石の場合は、

$$b_0 = B_y, \quad b_1 = 0 \quad (2.46)$$

4極磁石の場合は、

$$b_0 = 0, \quad b_1 = \left. \frac{\partial B_y}{\partial x} \right|_{x=y=0} \quad (2.47)$$

と与えられる。

$K(s)$ が定数の場合には (2.43) 式は解く事ができる。両辺に z' を掛けると、

$$z' z'' = z' K z \quad (2.48)$$

積分のできる形になる。

$$(z'^2)' = (z^2)' K \quad (2.49)$$

運動の不変量が積分定数 c_1 に対応して存在する。

$$z'^2 = z^2 K + c_1 \quad (2.50)$$

(2.50) 式から運動粒子は位相空間において $K < 0$ の時は楕円、 $K = 0$ の時は直線、そして $K > 0$ の時は双曲線を描くことが判る。更に積分をして (2.50) 式を解いておく*8。

$$\begin{cases} z(s) = \frac{e^{-(\sqrt{K}s) - \sqrt{K}c_2} (-4c_1 e^{2\sqrt{K}s} + e^{2\sqrt{K}c_2})}{4\sqrt{K}} \\ z'(s) = -2c_1 e^{\sqrt{K}s - \sqrt{K}c_2} - \frac{e^{-(\sqrt{K}s) - \sqrt{K}c_2} (-4c_1 e^{2\sqrt{K}s} + e^{2\sqrt{K}c_2})}{4} \end{cases} \quad (2.51)$$

この解を表している積分定数 c_1 と c_2 を運動の初期値 $z_0 = z(0)$ と $z'_0 = z'(0)$ を使って置き換えると*9、

$$\begin{cases} z(s) \\ = \frac{e^{-(\sqrt{K}s) - \log\{2(\sqrt{K}z_0 - z'_0)\}}}{4\sqrt{K}} \left\{ 4(\sqrt{K}z_0 - z'_0)^2 - 4e^{2\sqrt{K}s} (-Kz_0^2 + z_0'^2) \right\} \\ z'(s) \\ = -2e^{\sqrt{K}s - \log\{2(\sqrt{K}z_0 - z'_0)\}} (-Kz_0^2 + z_0'^2) \\ - \frac{e^{-(\sqrt{K}s) - \log\{2(\sqrt{K}z_0 - z'_0)\}}}{4} \left\{ 4(\sqrt{K}z_0 - z'_0)^2 - 4e^{2\sqrt{K}s} (-Kz_0^2 + z_0'^2) \right\} \end{cases} \quad (2.52)$$

*8 Mathematica3.0 は充分賢く、この微分方程式を一般の K について正しく積分してくれる。

*9 筆者はこの作業を Mathematica3.0 を使って行った。手計算でチェックをするのは少し厄介かも知れない。

具体的に、収束係数 K 、長さ l の加速器要素の転送行列を求めるには、(2.52) 式にサイン型初期値 $z_0 = 0$ 、 $z'_0 = 1$ およびコサイン型初期値 $z_0 = 1$ 、 $z'_0 = 0$ を代入して得たサイン型およびコサイン型軌跡とその微分を (1.15) 式に従って配置すればよい。自由空間に於ける水平および垂直方向、そして水平偏向磁石に於ける垂直方向の運動は $K = 0$ の場合であり、転送行列は次のようになる。

$$M(l, 0) = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

収束磁石や水平偏向磁石に於ける水平方向、また発散磁石に於ける垂直方向の運動は $K < 0$ の場合である。

$$M(l, 0) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{-K}l) & \frac{1}{\sqrt{-K}}\sin(\sqrt{-K}l) \\ -\sqrt{-K}\sin(\sqrt{-K}l) & \cos(\sqrt{-K}l) \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

収束磁石に於ける垂直方向そして発散磁石に於ける水平方向の運動は $K > 0$ の場合である。

$$M(l, 0) = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{K}l) & \frac{1}{\sqrt{K}}\sinh(\sqrt{K}l) \\ \sqrt{K}\sinh(\sqrt{K}l) & \cosh(\sqrt{K}l) \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

ここに得た転送行列を使い、位相空間で運動粒子を表す点が、 K の符号により具体的にどのように違って移動するか計算したものを図 2.3 に示しておく。自由空間では直線、収束磁石では正立した楕円そして発散磁石では（正立した）双曲線に沿って位相空間点が流れていく。

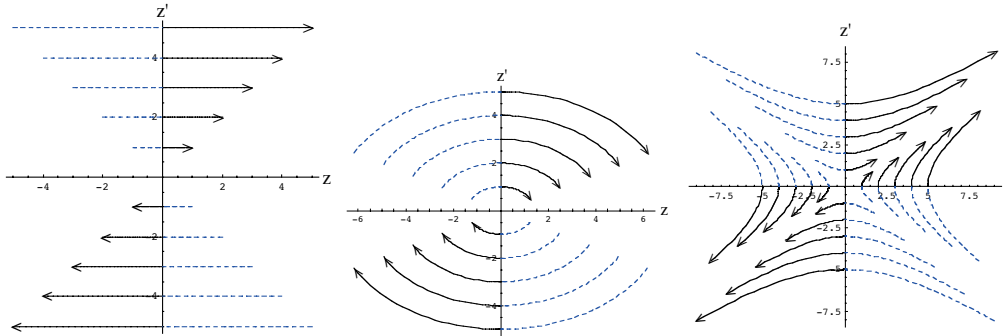


図 2.3 上より順番に、自由空間 ($K = 0$)、収束磁石 ($K = -0.5$) そして発散磁石 ($K = 0.5$) の中で位相空間点が移動する様子。全図に共通した初期値として、 $(z_0, z'_0) = (0, n)$ 、 n は -5 から 5 の間の全整数を選んだ。さらに発散磁石の初期値には、 $(z_0, z'_0) = (n, 0)$ 、 n としては -5 から 5 の間の全整数を付け加えてある。 $l = 0$ から $l = 1$ を実線で $l = -1$ から $l = 0$ を破線で表してある。

2.3 周回運動 I ベータトロン振動

このセクションでは力学系に周期的条件のある場合の粒子運動を考える。これはいわゆるベータトロン振動であり、円形加速器の設計およびビーム運転の基礎を成す題材であ

る。ここでは線形近似の範囲で話を進め、擬調和振動子としての取り扱いを導入し、これと転送行列の方法とを対照させる。この節ではビーム粒子のエネルギーが一定の場合を取り扱い、シンクロトロン振動と呼ばれるエネルギー変動については次節で扱う。

2.3.1 Floquet の定理とビームの安定条件

円形加速器を念頭に置いて、(2.43) 式の取束力 $K(s)$ に周期 L の周期性があるとする。

$$K(s+L) = K(s) \quad (2.56)$$

この条件を満たす (2.43) 式は Hill の方程式と呼ばれる。

$$z'' = K(s)z \quad (2.57)$$

Floquet の定理

もし $z_1(s)$ と $z_2(s)$ が (2.57) 式の2つの線形独立解ならば、周期性のために、 $z_1(s+L)$ と $z_2(s+L)$ もまた線形独立解である。また (2.57) 式の任意の解は2つの線形独立解の線形結合で表す事ができる。そこで $z_1(s+L)$ と $z_2(s+L)$ を $z_1(s)$ と $z_2(s)$ の線形結合によって表現する事ができる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z_1(s+L) \\ z_2(s+L) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}z_1(s) + a_{12}z_2(s) \\ a_{21}z_1(s) + a_{22}z_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \end{pmatrix} \\ &\equiv A \begin{pmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.58)$$

ここで A は線形独立解同士を結び付ける係数の行列であるが故に正則であり、 $\det A \neq 0$ である。

このとき次の擬周期条件を満足する解が存在するか否かを調べてみよう。

$$z(s+L) = \lambda z(s) \quad (2.59)$$

一般解を

$$z(s) = c_1 z_1(s) + c_2 z_2(s) \quad (2.60)$$

と表現して擬周期条件 (2.59) 式に代入すれば、

$$\begin{aligned} z(s+L) - \lambda z(s) &= c_1 z_1(s+L) + c_2 z_2(s+L) - \lambda \{c_1 z_1(s) + c_2 z_2(s)\} \\ &= (c_1, c_2) (A - \lambda I) \begin{pmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (2.61)$$

上式が線形独立解 $z_1(s)$ と $z_2(s)$ について独立変数 s の全域で成立するには、 $z_1(s)$ と $z_2(s)$ 各々の係数がゼロでなければならない。即ち次式を満足する非ゼロの c_1 および c_2 が見つければよい。

$$(c_1, c_2) (A - \lambda I) = (0, 0) \quad (2.62)$$

すなわち次の特性方程式を満たす $\lambda \neq 0$ を求め (2.62) 式を通じて c_1 および c_2 を決定することで、Hill 方程式の擬周期条件 (2.59) 式を満たす解を求めた事になる。

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.63)$$

この特性方程式を展開すれば λ に関する次の2次方程式を得る。

$$\lambda^2 - (\text{Tr}A)\lambda + \det A = 0 \quad (2.64)$$

$\det A \neq 0$ であるから、この式には常に $\lambda \neq 0$ となる解が存在することが判る。

さて、特性方程式の2根が互いに異なる時 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ には、 $\lambda_i \equiv e^{\alpha_i L}$ と置くことができ、擬周期条件を満足する Hill 方程式の線形独立解 $z_i(s)$ は次のように書ける。

$$z_i(s+L) = \lambda_i z_i(s) \equiv e^{\alpha_i L} z_i(s) \quad (2.65)$$

ここで次式で定義される関数 $\varphi_i(s)$ を新たに導入すると、

$$\varphi_i(s) \equiv e^{-\alpha_i s} z_i(s) \quad (2.66)$$

この関数は次に示すように周期 L を有している。

$$\begin{aligned} \varphi_i(s+L) &= e^{-\alpha_i(s+L)} z_i(s+L) \\ &= e^{-\alpha_i(s+L)} e^{\alpha_i L} z_i(s) = e^{-\alpha_i s} z_i(s) = \varphi_i(s) \end{aligned} \quad (2.67)$$

最終的に Hill 方程式の線形独立解 $z_i(s)$ は次式で記述する事ができる。これは Floquet の定理の別表現である。

$$z_i(s) = e^{\alpha_i s} \varphi_i(s) \quad (2.68)$$

ここで

$$\varphi_i(s) = \varphi_i(s+L) \quad (2.69)$$

ビームの安定条件

Hill 方程式の線形独立解の対としてサイン型及びコサイン型初期値を持つ粒子軌道を選べば、行列 A として転送行列を使えばよく、 $\det A = 1$ が仮定できる。このとき (2.64) 式から決まる λ の2根は複素平面上で図 2.4 のように位置する。(2.59) 式の表現から分かるように、特性根の対が単位円上に在るとき運動は安定で、そこから外れるとき不安定である。この条件を周期 L に渡っての転送行列^{*10} M の行列要素で表現すると次式となる。

$$\begin{cases} |\text{Tr}M| = |m_{11} + m_{22}| < 2 & \text{安定} \\ |\text{Tr}M| = |m_{11} + m_{22}| > 2 & \text{不安定} \end{cases} \quad (2.70)$$

また安定不安定の境界条件は $m_{11} + m_{22} = \pm 2$ であり、これは重根条件 $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ に対応している。このとき粒子の運動は、 $\lambda = 1$ のとき周期 L 、そして $\lambda = -1$ のとき周期 $2L$ の (擬周期ではない) 完全な周期性を持つ。

^{*10} 周期 L が円形加速器の周長に等しい場合、この転送行列を特に周回行列 (revolution matrix) と呼ぶ。

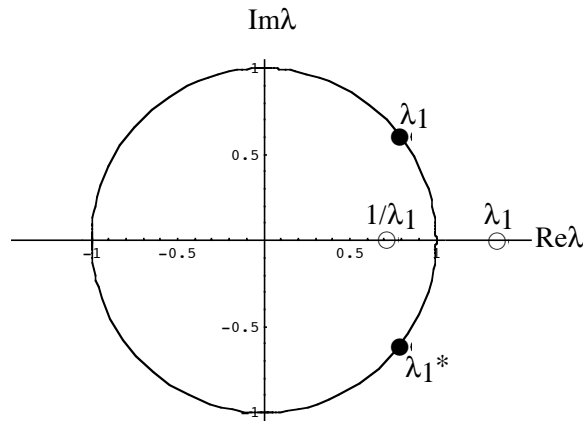


図 2.4 特性根の位置とビーム運動の安定性。●で示す位置に特性根の対が在ればビーム運動は安定、一方○の様になると不安定である。

2.3.2 擬調和振動子解と Twiss パラメーター

安定解の形

ベータatron振動を表す Hill 方程式 (2.57) 式の解が (2.68) 式の形で書けることを学んだが、安定運動の条件が満たされている場合について、より具体的な記述を試みよう。Floquet の定理により、次の擬調和振動子の形で安定解を記述できることが保証される。

$$z(s) = \sqrt{W} \zeta(s) \cos \{ \phi(s) - \theta \} \tag{2.71}$$

ここで振幅を表す項 $\zeta(s)$ には周期条件が課されている。

$$\zeta(s + L) = \zeta(s) \tag{2.72}$$

運動方程式 (2.57) 式に以下を代入する、

$$\begin{cases} z' = \sqrt{W} \zeta' \cos(\phi - \theta) - \sqrt{W} \zeta \phi' \sin(\phi - \theta) \\ z'' = \sqrt{W} (\zeta'' - \zeta \phi'^2) \cos(\phi - \theta) - \sqrt{W} (2\zeta' \phi' + \zeta \phi'') \sin(\phi - \theta) \end{cases} \tag{2.73}$$

運動の初期値 θ に依らず恒等式が成立する条件として、サイン項とコサイン項各々の係数がゼロになることを要求すれば、

$$\begin{cases} \zeta'' - \zeta \phi'^2 - K(s) \zeta = 0 \\ 2\zeta' \phi' + \zeta \phi'' = 0 \end{cases} \tag{2.74}$$

(2.74) 式の第 2 式を $\phi' \zeta$ で除することで、積分の可能な形になる。

$$2 \frac{\zeta'}{\zeta} + \frac{\phi''}{\phi'} = 0 \tag{2.75}$$

これを s で積分し積分定数をゼロに選べば、

$$2 \ln \zeta + \ln \phi' = \text{const.} = 0 \quad (2.76)$$

位相項 $\phi(s)$ は次の関係を満たさなければならない事が判る。

$$\phi(s) = \int_0^s \frac{ds}{\zeta(s)^2} \quad (2.77)$$

(2.77) 式を (2.74) 式の第1式に代入すれば、振幅項 $\zeta(s)$ の従う非線形方程式が導かれる。

$$\zeta'' = K(s)\zeta + \frac{1}{\zeta^3} \quad (2.78)$$

Twiss パラメター

(2.78) 式に従う振幅項 $\zeta(s)$ およびその s 微分を使い次式により新しい関数 $\beta(s)$ 、 $\alpha(s)$ および $\gamma(s)$ を定義し、これを Twiss パラメターと呼ぶ。

$$\begin{cases} \beta(s) = \zeta(s)^2 \\ \alpha(s) = -\frac{1}{2}\beta'(s) = -\zeta(s)\zeta'(s) \\ \gamma(s) = \frac{1+\alpha^2(s)}{\beta(s)} = \frac{1}{\zeta(s)^2} + \zeta'(s)^2 \end{cases} \quad (2.79)$$

Twiss パラメターを使ってベータatron振動の解を書くと、

$$z(s) = \sqrt{W} \sqrt{\beta(s)} \cos \{ \phi(s) - \theta \} \quad (2.80)$$

またこの s 微分は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} z'(s) &= \frac{\beta'(s)}{2\beta(s)} z(s) - \frac{\sqrt{W}}{\sqrt{\beta(s)}} \sin \{ \phi(s) - \theta \} \\ &= \frac{-\sqrt{W}}{\sqrt{\beta(s)}} [\alpha(s) \cos \{ \phi(s) - \theta \} + \sin \{ \phi(s) - \theta \}] \\ &= \sqrt{W} \sqrt{\gamma(s)} \sin \{ \phi(s) - \theta - \chi \} \end{aligned} \quad (2.81)$$

ここで、

$$\begin{cases} \cos \chi = \frac{-1}{\sqrt{\beta(s)\gamma(s)}} \\ \sin \chi = \frac{\alpha(s)}{\sqrt{\beta(s)\gamma(s)}} \end{cases} \quad (2.82)$$

である。

(2.80) 式と (2.81) 式を使うことで定数 \sqrt{W} を Twiss パラメターおよび $z(s)$ と $z'(s)$ で表す。

$$\begin{aligned} W &= W \cos^2 \{ \phi(s) - \theta \} + W \sin^2 \{ \phi(s) - \theta \} \\ &= \left\{ \frac{z(s)}{\sqrt{\beta(s)}} \right\}^2 + \left[\sqrt{\beta(s)} \left\{ \frac{\beta'(s)}{2\beta(s)} z(s) - z'(s) \right\} \right]^2 \\ &= \gamma(s) z(s)^2 + 2\alpha(s) z(s) z'(s) + \beta(s) z'(s)^2 \end{aligned} \quad (2.83)$$

これは (1.24) 式と同じ表式であり、先に導入した位相空間の楕円表示パラメーターとここで定義した Twiss パラメーターとが同一物である事を示している。ここに表われた定数 W は、加速器ビームの分野では Courant-Snyder 不変量と呼ばれる。運動粒子が位相空間において描く楕円の面積が πW であることは前にも述べた通りである。

ビームを構成する多数の運動粒子の平均的 Courant-Snyder 不変量はエミッタンス^{*11}と呼ばれ、ビームの大きさや角度拡がりを決める物理量として特に重要である。

2.3.3 転送行列要素と Twiss パラメーター

転送行列の要素を擬調和振動子の解を使って表現してみよう。そのためには (2.84) 式のサイン型初期値および (2.85) 式のコサイン型初期値から始まる粒子運動の軌跡とその s 微分を (2.80) 式と (2.81) 式の擬調和振動子解で記述して (2.86) 式に従って配列すればよい。

$$\text{サイン型初期条件} \quad \begin{cases} z(s_0) = 0 \\ z'(s_0) = 1 \end{cases} \quad (2.84)$$

$$\text{コサイン型初期条件} \quad \begin{cases} z(s_0) = 1 \\ z'(s_0) = 0 \end{cases} \quad (2.85)$$

$$M(s, s_0) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s, s_0) & S(s, s_0) \\ C'(s, s_0) & S'(s, s_0) \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

まずコサイン型軌跡について、初期条件を (2.80) 式と (2.81) 式を使って表現する。次式がコサイン型軌跡の振幅 a_c および初期位相 θ_c を定義する。

$$\begin{cases} a_c \sqrt{\beta(s_0)} \cos \{ \phi(s_0) - \theta_c \} & = 1 \\ \frac{\beta'(s_0)}{2\beta(s_0)} - \frac{a_c}{\sqrt{\beta(s_0)}} \sin \{ \phi(s_0) - \theta_c \} & = 0 \end{cases} \quad (2.87)$$

若干の計算の後、振幅 a_c および初期位相 θ_c は次式で与えられる。

$$\begin{cases} a_c & = \sqrt{\gamma(s_0)} \\ \begin{pmatrix} \cos \vartheta_c \\ \sin \vartheta_c \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} \cos \phi(s_0) & \sin \phi(s_0) \\ \sin \phi(s_0) & -\cos \phi(s_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\beta(s_0)\gamma(s_0)}} \\ \frac{-\alpha(s_0)}{\sqrt{\beta(s_0)\gamma(s_0)}} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.88)$$

このように与えられた a_c と θ_c を使ってコサイン型軌跡は次式で書ける、そしてこれが転送行列の (1, 1) 要素 m_{11} である。

$$\begin{aligned} m_{11} &= C(s, s_0) = a_c \sqrt{\beta(s)} \cos \{ \phi(s) - \theta_c \} \\ &= \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta(s_0)}} [\cos \{ \phi(s) - \phi(s_0) \} + \alpha(s_0) \sin \{ \phi(s) - \phi(s_0) \}] \end{aligned} \quad (2.89)$$

^{*11} 平均的 Courant-Snyder 不変量という一義的でない言い方をした理由は、エミッタンスの定義がビームの種類や状況により異なるからである。位相空間におけるビーム分布が一律にガウス分布と考えられる電子貯蔵リングでは、エミッタンスはビーム構成粒子の Courant-Snyder 不変量平均値の半分で定義される。一方電子線形加速器や陽子シンクロトロンなどでは、ビームの位相空間分布の関数形がビームの加速履歴等に依存する。このような場合、ビームのエミッタンスはより便宜的ないし実用的方法で定義せざるを得ない。

サイン型軌跡の振幅 a_s および初期位相 θ_s は次の式で定義される。

$$\begin{cases} a_s \sqrt{\beta(s_0)} \cos \{\phi(s_0) - \theta_s\} = 0 \\ -\frac{a_s}{\sqrt{\beta(s_0)}} \sin \{\phi(s_0) - \theta_s\} = 1 \end{cases} \quad (2.90)$$

a_s および θ_s を露に表現すれば、

$$\begin{cases} \theta_s = \phi(s_0) - \frac{\pi}{2} \\ a_s = -\sqrt{\beta(s_0)} \end{cases} \quad (2.91)$$

これを使ってサイン型軌跡を表せば、転送行列の (1, 2) 要素 m_{12} が求められる。

$$\begin{aligned} m_{12} &= S(s, s_0) = a_s \sqrt{\beta(s)} \cos \{\phi(s) - \theta_s\} \\ &= \sqrt{\beta(s)\beta(s_0)} \sin \{\phi(s) - \phi(s_0)\} \end{aligned} \quad (2.92)$$

(2.89) 式のコサイン型軌跡および (2.92) 式のサイン型軌跡を s で微分することにより、それぞれ転送行列の (2, 1) 要素 m_{21} および (2, 2) 要素 m_{22} を得る。

$$\begin{aligned} m_{21} &= C'(s, s_0) \\ &= -\frac{\{1 + \alpha(s)\alpha(s_0)\} \sin \{\phi(s) - \phi(s_0)\} + \{\alpha(s) - \alpha(s_0)\} \cos \{\phi(s) - \phi(s_0)\}}{\sqrt{\beta(s)\beta(s_0)}} \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} m_{22} &= S'(s, s_0) \\ &= \sqrt{\frac{\beta(s_0)}{\beta(s)}} [\cos \{\phi(s) - \phi(s_0)\} - \alpha(s) \sin \{\phi(s) - \phi(s_0)\}] \end{aligned} \quad (2.94)$$

周回行列

前のセクションで得た転送行列が、円形加速器 1 周分を表すとき即ち周回行列 (revolution matrix) になるとき、Twiss パラメータの周期性から次のようになる。

$$M(s_0 + L, s_0) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\nu + \alpha(s_0) \sin 2\pi\nu & \beta(s_0) \sin 2\pi\nu \\ -\gamma(s_0) \sin 2\pi\nu & \cos 2\pi\nu - \alpha(s_0) \sin 2\pi\nu \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

ここで ν はベータatron振動数またはベータatronチューンと呼ばれる量で次式で与えられる。

$$2\pi\nu = \phi(s_0 + L) - \phi(s_0) = \int_{s_0}^{s_0+L} \frac{ds}{\beta(s)} \quad (2.96)$$

リング内位置 s_0 における周回行列 R_0 を次のように記述してみる。

$$\begin{aligned} R_0 &\equiv M(s_0 + L, s_0) \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\pi\nu + \alpha(s_0) \sin 2\pi\nu & \beta(s_0) \sin 2\pi\nu \\ -\gamma(s_0) \sin 2\pi\nu & \cos 2\pi\nu - \alpha(s_0) \sin 2\pi\nu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos 2\pi\nu + \begin{pmatrix} \alpha(s_0) & \beta(s_0) \\ -\gamma(s_0) & -\alpha(s_0) \end{pmatrix} \sin 2\pi\nu \\ &\equiv I \cos 2\pi\nu + J_0 \sin 2\pi\nu \end{aligned} \quad (2.97)$$

ここで Twiss パラメーターで表された行列 J_0 は次式を満たす。

$$J_0^2 = -I \quad (2.98)$$

この性質を使えば、 n ターン分の運動を表す転送行列 $(R_0)^n$ は次のようになる事が判る。

$$\begin{aligned} (R_0)^n &= (I \cos 2\pi\nu + J_0 \sin 2\pi\nu)^n \\ &= I \cos 2\pi n\nu + J_0 \sin 2\pi n\nu \end{aligned} \quad (2.99)$$

リング内位置 s_1 における周回行列 R_1 は、

$$R_1 \equiv M(s_1 + L, s_1) = I \cos 2\pi\nu + J_1 \sin 2\pi\nu \quad (2.100)$$

s_0 から s_1 への転送行列 T と、

$$T \equiv M(s_1, s_0) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

リング内位置 s_0 における周回行列 R_0 とを使って次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} R_1 &= M(s_1 + L, s_0 + L) M(s_0 + L, s_0) M(s_0, s_1) \\ &= TR_0T^{-1} \end{aligned} \quad (2.102)$$

これはまた Twiss パラメーターの変換規則も与えてくれる。

$$J_1 = TJ_0T^{-1} \quad (2.103)$$

2.4 周回運動 II シンクロトロン振動

前節ではビーム内粒子のエネルギー変動は考えなかったが、ここでは粒子エネルギー変動をとまなう場合の周回運動について学ぶ。いわゆるシンクロトロン振動について学ぶことになる。

2.4.1 運動量偏差のある粒子の運動

水平方向の運動や運動量偏差によって、運動粒子から基準座標曲線に下された垂線の足の位置 s の進行速度は影響を受ける。そして加速空洞では基準座標曲線上を早さ v_0 で進行する参照運動量粒子との到達時間の差が、その粒子が加速空洞内の電場から獲得するエネルギー量を左右する。そこでまず、この到達時間差の発生とそれによるエネルギー獲得量の追跡がこの節の大きなテーマである。

この目的のために参照運動量粒子との到達時間差 $\tau = t_0 - t$ を使って時間を表す。今まで使ってきた垂線の足の速さ \dot{s} とは次式で関係付けられている。

$$\begin{aligned} \tau' &= \frac{dt_0}{ds} - \frac{dt}{ds} \\ &= \frac{1}{v_0} - \frac{1}{\dot{s}} \end{aligned} \quad (2.104)$$

ここで t_0 は参照運動量粒子の場所 s への到達時刻であり、注目する粒子が参照運動量粒子より早く到達するとき $\tau > 0$ となる。

運動量偏差付き運動方程式と拡張転送行列

運動量が参照運動量より Δp 大きい粒子の運動方程式に運動量偏差および粒子座標共々に線形近似を施し、具体的加速器要素毎に運動方程式を解いていく。言うまでもなく磁場要素の中では、運動量偏差は定数である。

更にこの運動方程式の解を用いて、次式で定義される拡張4元ベクトル \mathbf{x}_4 に対応する4行4列転送行列 M_4 を求め、転送行列で運動を扱えるようにする。

$$\mathbf{x}_4(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ v_0\tau(s) \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix} \quad (2.105)$$

ここで時間成分を $v_0\tau$ としたのは水平方向と次元を合わせるためである。

■ **自由空間および4極磁石** 自由空間および4極磁石における運動方程式は (2.24) 式、(2.26) 式および (2.31) 式から、まとめて次のように表せる。

$$\begin{cases} x'' = -Kx \\ y'' = Ky \\ \dot{s} = v_0 \left(1 + \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{\Delta p}{p_0} \right) \end{cases} \quad (2.106)$$

ここで K は自由空間ではゼロ、4極磁石では (2.32) 式により与えられる。

(2.106) 式によればこれらの加速器要素では、粒子速度の差から生じる到達時間差だけが、適用した線形近似の範囲で発現する運動量偏差の効果である。即ち線形近似の範囲で水平垂直方向の運動は運動量偏差に影響されない^{*12}。運動量偏差 \implies 時間偏差 時間に関する (2.106) 第3式を (2.104) 式に倣い到達時間差 τ を使って書いておく。

$$\tau' = \frac{1}{v_0} \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{\Delta p}{p_0} \quad (2.107)$$

4×4 転送行列 M_4 を4個の 2×2 部分行列に分けて考えると、非対角に位置する2個はゼロ行列、左上対角に位置する部分行列は磁石の種類に応じて先に求めた (2.53) 式、(2.54) 式ないし (2.55) 式と同じになる。そして右下対角に位置する部分行列は (2.107) 式から次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{s}{\gamma_0^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.108)$$

■ **2極磁石** 2極磁石の中では運動量偏差の影響はより複雑かつ重要である。運動量偏差および粒子座標について線形近似を施した運動方程式 (2.38) 式を使う。

^{*12} 運動量偏差により K の大きさが実効的に変わる。これから生じるベータトロン振動数ズレの運動量偏差依存度をクロマチシティ (色収差) と言い、特に線形依存度を線形クロマチシティと呼んでいる。この効果は運動方程式の中では、微量 $\frac{\Delta p}{p_0}$ と微量変位 x ないし y との積として表れ、2次の微量である。

$$\begin{cases} x'' = -\frac{x}{\rho_0^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta p}{p_0} \\ y'' = 0 \\ \dot{s} = v_0 \left(1 + \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{\Delta p}{p_0} - \frac{1}{\rho_0} x \right) \end{cases} \quad (2.109)$$

(2.109) 式によれば、運動量偏差 Δp により水平方向の運動に影響が生じる、更に水平方向の運動および運動量偏差が時間変動に影響する。この影響の方向は偏向磁石内部に限定すれば一方的である。運動量偏差 \Rightarrow 水平運動 \Rightarrow 時間偏差 垂直方向の運動は時間変動に関与しないので、以後この節内では考慮しない。ここで時間に関する (2.109) 第3式を τ を使って書直し水平方向運動方程式と連立させておく。

$$\begin{cases} x'' = -\frac{x}{\rho_0^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta p}{p_0} \\ \tau' = \frac{1}{v_0} \left(-\frac{x}{\rho_0} + \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{\Delta p}{p_0} \right) \end{cases} \quad (2.110)$$

(2.110) 第1式で表された水平運動について曲率半径 ρ_0 が一定な条件下で解く。ここでは右辺第2項の非斉次項の存在に注意する必要がある。 C_1 と C_2 を積分定数として、一般解は (2.111) 式に与えられる。

$$x(s) = \frac{\Delta p}{p_0} \rho_0 + C_2 \cos \frac{s}{\rho_0} + C_1 \sin \frac{s}{\rho_0} \quad (2.111)$$

ここに得た解 $x(s)$ を (2.110) 第2式で表された時間運動方程式の右辺に代入して s で積分すれば、到達時間の一般解は C_3 を新たな積分定数として次のようになる。

$$v_0 \tau(s) = C_3 + \frac{\Delta p}{p_0} \left(\frac{1}{\gamma_0^2} - 1 \right) s + C_1 \cos \frac{s}{\rho_0} + C_2 \sin \frac{s}{\rho_0} \quad (2.112)$$

以上に得られた一般解を4元ベクトルとして纏めて書いておこう。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_4(s) &\equiv \begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ v_0 \tau(s) \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\Delta p}{p_0} \rho_0 + C_2 \cos \frac{s}{\rho_0} + C_1 \sin \frac{s}{\rho_0} \\ \frac{1}{\rho_0} \left(-C_2 \sin \frac{s}{\rho_0} + C_1 \cos \frac{s}{\rho_0} \right) \\ C_3 + \frac{\Delta p}{p_0} \left(\frac{1}{\gamma_0^2} - 1 \right) s + C_1 \cos \frac{s}{\rho_0} + C_2 \sin \frac{s}{\rho_0} \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.113)$$

一般解に含まれる積分定数を使って、 $s = 0$ における4元ベクトルの初期値を表現するこ

とができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_4(\mathbf{0}) &\equiv \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \\ v_0\tau(0) \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Delta p/p_0)\rho_0 + C_2 \\ C_1/\rho_0 \\ C_1 + C_3 \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \rho_0 \\ 1/\rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.114)$$

転送行列の方法で粒子運動を記述するには、次式による拡張された初期条件（一般化されたコサイン型サイン型初期値）から出発する軌道を求めればよい。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{4I}(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_{4II}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}_{4III}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_{4IV}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.115)$$

そのために、上に与えられた4種の初期条件の各々について、(2.114)式を使い運動の不変量 C_1 、 C_2 、 C_3 および $\Delta p/p_0$ を決定し、それら不変量を(2.113)式の4元ベクトルの一般解に代入する。このようにして初期条件(2.115)式から出発する4種の軌道 $\mathbf{x}_{4I}(s)$ 、 $\mathbf{x}_{4II}(s)$ 、 $\mathbf{x}_{4III}(s)$ および $\mathbf{x}_{4IV}(s)$ が求められる。4×4転送行列としては、列ベクトル $\mathbf{x}_{4I}(s)$ 、 $\mathbf{x}_{4II}(s)$ 、 $\mathbf{x}_{4III}(s)$ および $\mathbf{x}_{4IV}(s)$ をこの順番に並べた4×4転送行列 $M_4(s, 0) \equiv (\mathbf{x}_{4I}(s) \ \mathbf{x}_{4II}(s) \ \mathbf{x}_{4III}(s) \ \mathbf{x}_{4IV}(s))$ を作れば、これにより拡張4元ベクトル \mathbf{x}_4 が追跡できる。こうして得られた転送行列要素の露わな表現が次式である。

$$M_4(s, 0) = \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{\rho_0} & \rho_0 \sin \frac{s}{\rho_0} & 0 & \rho_0 \left(1 - \cos \frac{s}{\rho_0}\right) \\ -\frac{1}{\rho_0} \sin \frac{s}{\rho_0} & \cos \frac{s}{\rho_0} & 0 & \sin \frac{s}{\rho_0} \\ -\sin \frac{s}{\rho_0} & \rho_0 \left(\cos \frac{s}{\rho_0} - 1\right) & 1 & \rho_0 \sin \frac{s}{\rho_0} + \frac{s}{\gamma_0^2} - s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.116)$$

■高周波加速空洞における加速 高周波加速空洞が粒子運動へ影響するのは、前に仮定した長さゼロの空洞の場合、到達時間によって異なるエネルギー獲得量である。この獲得エネルギーは加速高周波電圧の時間的変化を線形近似することにより(2.41)式で与えられている。また獲得エネルギーと運動量との関係(2.42)式を使えば、到達時間偏差を距離の次元で示す $v_0\tau$ と運動量偏差 $\frac{\Delta p}{p_0}$ を元とするベクトルと転送行列で次のように加速空洞の効果を表すことができる。

$$\begin{pmatrix} v_0\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{in} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{q}{v_0 p_0} V_{RF}(t_0) \end{pmatrix} \quad (2.117)$$

ここで添え字の in および out は各々加速空洞の直前および直後を意味する。

断熱減衰と正規化エミッタンス (2.117) 式右辺の非斉次項の存在は、参照運動量粒子が高周波空洞で正味の加速を受ける場合に対応する。このような場合には加速空洞に於ける加速がベータトロン振動に（線形近似の範囲でも）影響を及ぼす。すなわち加速に際しては、横方向運動量成分 p_x および p_y は一定のまま進行方向運動量成分 p_s のみ増加する。このため我々が採用している横方向位相空間の運動量 x' および y' はエネルギー獲得に伴う進行方向運動量の増加 δp により次のように減少する。

$$y' = \frac{p_y}{p_s} \longrightarrow \frac{p_y}{p_s + \delta p} \approx y' \left(1 - \frac{\delta p}{p_s} \right) \quad (2.118)$$

$p_s \approx p_0$ という近似を使い、このベータトロン振動の減衰を4元ベクトルおよび対応する転送行列を使って表現すると次のようになる。

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ v_0\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{q}{v_0 p_0} V_{RF}(t_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ v_0\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{in} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{q}{v_0 p_0} V_{RF}(t_0) \end{pmatrix} \quad (2.119)$$

この転送行列の内ベータトロン振動を表現する左上方の 2×2 転送行列の行列式は1より小さく、ベータトロン振動に対応する Courant-Snyder 不変量そしてエミッタンスが加速により減衰する事を表している^{*13}。

此处で述べたエミッタンス減衰が起こる加速器の具体例は、線形加速器における加速、シンクロトロンにおける加速、また貯蔵リングにおけるシンクロトロン放射に依るエネルギー損失の補給である。このうち正味のエネルギー増加を伴う線形加速器やシンクロトロンでは、この減衰のことを断熱減衰 (adiabatic damping) と呼んでいる。そしてビームエミッタンス記述の為に、加速に際しても保存する正規化エミッタンス ε_N が次式で定義され用いられる。

$$\varepsilon_N \equiv \varepsilon \times (\gamma\beta) \quad (2.120)$$

ここで ε は通常のビームサイズを与える幾何学的エミッタンスであり、 γ は相対論係数そして β は粒子速度を光速で除したものである。

シンクロトロン放射に依るエネルギー損失の補給から生じる減衰については後に学ぶことになる。また以後この章の中では (2.117) 式右辺の非斉次項の存在を考える必要のない $V_{RF}(t_0) = 0$ の場合のみを扱う。

^{*13} このことは高周波空洞における加速が正準運動では無いことを意味してしまうが、これは事実と反する。この減衰は我々の用いている運動量 y' が座標 y の正準共役運動量 p_y とは異なるために生じる見掛けの現象である。実際、加速に際して正準共役運動量 p_y は変化しない。

2.4.2 転送行列によるシンクロトロン振動の追跡

水平方向と時間運動量方向を表わす4元ベクトルおよび対応する 4×4 転送行列を使ってシンクロトロン振動を追跡してみよう。

簡単化のため加速空洞はリング中に一箇所だけに在り、他の加速器要素は磁石のみとする。磁石のみを表わす時、転送行列は一般的に2極磁石の転送行列と同じ次式の形に書ける。

$$M_{4mag} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & e \\ m_{21} & m_{22} & 0 & f \\ h & i & 1 & g \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.121)$$

この形の行列を掛け合わせると再びこの形に書けることは簡単に確認できる。このようにして高周波空洞部以外の転送行列をまとめて書くことにしよう。

Symplectic 条件に依る自由度の抑制

(2.121) 式の行列要素の自由度は、正準運動を記述する転送行列という条件のために、実はもっと少ない。すなわち次式に定義される Symplectic 行列を使って表わされる Symplectic 条件 (2.123) 式を満たさなければならない^{*14}。

$$S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.122)$$

$$M_{4mag}^T S_4 M_{4mag} = S_4 \quad (2.123)$$

この Symplectic 条件から決まる (2.121) 式の行列要素相互の関係を露に書き出せば、次のようになる。

$$\begin{cases} m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 1 \\ h = -m_{11}f + m_{21}e \\ i = -m_{12}f + m_{22}e \end{cases} \quad (2.124)$$

^{*14} 第1章において我々の扱う転送行列は一般に Symplectic 条件を満たすべき事を述べた。より直接的に、今までに求めた転送行列が、ここで示した Symplectic 条件を満たしていることは具体的に確認できる。さらに Symplectic 条件を満たす転送行列の積により定義される転送行列が Symplectic 条件を満たすことも明白に示される。一般に Symplectic 条件を満たす転送行列は群を成している事が示される。

運動量分散関数

4×4 転送行列 (2.121) 式から時間 τ に対応する行と列を除いて 3×3 転送行列 (2.125) 式を作る。

$$M_{3mag} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & e \\ m_{21} & m_{22} & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.125)$$

この転送行列を使って、次式で定義された 3 元ベクトルで表現される運動量偏差 (磁場の中では一定に保たれる) を持った粒子軌道の追跡ができる。

$$\mathbf{x}_3(s) \equiv \begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix} \quad (2.126)$$

この転送行列は運動量偏差を不変に保ち、このことに対応する固有値は 1 となる。周回行列である場合、行列の固有値 1 に属する固有ベクトルが運動量偏差の有る粒子の閉軌道を与える。すなわち運動量に依存するビーム軌道変位と傾斜の分散がこれによって記述される。この固有ベクトルの第 1 成分を運動量分散関数と称しその s 微分は第 2 成分で与えられる。一方他の 2 つの固有値に属する固有ベクトルはこの閉軌道を中心とする自由なベータトロン振動に対応する。具体的に周回行列から運動量分散関数 η_x を計算するには次式を解けばよい。

$$M_{3mag} \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta'_x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta'_x \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.127)$$

このように、場所 s に於ける周回行列からその点の運動量分散関数とその微分を求めたものが (2.128) 式である。

$$\begin{cases} \eta_x(s) &= -\frac{e(1-m_{22})+fm_{12}}{-2+m_{11}+m_{22}} \\ \eta'_x(s) &= -\frac{f(1-m_{11})+em_{21}}{-2+m_{11}+m_{22}} \end{cases} \quad (2.128)$$

これから逆に周回行列要素を表現すると (2.129) 式になる。

$$\begin{cases} e(s) &= \eta_x(1-m_{11}) - \eta'_x m_{12} \\ f(s) &= \eta'_x(1-m_{22}) - \eta_x m_{21} \end{cases} \quad (2.129)$$

運動分離の条件

上記 Symplectic 条件と運動量分散関数を使って周回行列としての (2.121) 式を書き直すと (2.130) 式になる。

$$M_{4mag} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & \eta_x(1-m_{11}) - \eta'_x m_{12} \\ m_{21} & m_{22} & 0 & \eta'_x(1-m_{22}) - \eta_x m_{21} \\ \eta'_x(1-m_{11}) + \eta_x m_{21} & -\eta_x(1-m_{22}) - \eta'_x m_{12} & 1 & g \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.130)$$

この周回行列から知れる所は、一般には水平運動（ベータロン振動）と時間運動量運動（シンクロトロン振動）とは、線形近似の範囲でも、互いに結合しているということである。運動量分散関数 $\eta_x(s)$ とその微分 $\eta'_x(s)$ がゼロの場所に限り周回行列は区分対角化される。しかし円形加速器で全周に互りゼロ分散を実現することは原理的に不可能である。

重要な点は、加速空洞が設置される場所で周回行列が区分対角化されていることが、運動の分離の為の必要充分条件だと言うことである。この「運動分離」の物理的意味合いは、ベータロン振動がシンクロトロン振動に影響をしない、またその逆も成立するということである^{*15}。もちろんたとえ加速空洞が無分散の場所に設置されていても、運動量分散関数がゼロでない場所で観測すればシンクロトロン振動に伴う運動量の増減がビーム位置の変化として見られるであろう。しかし加速空洞の位置で観測する限り運動が完全に分離されている点が本質的である。

2.4.3 分離されたシンクロトロン振動

運動が分離されている条件、すなわち加速空洞が設置された場所の運動量分散関数とその s 微分がゼロであるときを考える。加速空洞が設置された場所の（磁場のみを考慮した）周回行列に、次のように加速空洞を表わす転送行列をかけて高周波加速を含む全周の

^{*15} この運動の分離は、あくまでも線形近似の範囲で成り立っている。たとえば、シンクロトロン振動の1周期の中で粒子は加速と減速を経験するわけで、これに伴う（ベータロン振動の）断熱減衰とその逆過程をシンクロトロン振動の周期毎に繰り返している。すなわちベータロン振動はシンクロトロン振動により振幅変調を受けているがこれは高次効果である。

周回行列を作ることができる。

$$\begin{aligned}
 M_{4tot} &\equiv M_{4rf}M_{4mag} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & \frac{-q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) & 1 - g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.131}$$

この場所では周回行列が区分対角化されている事が分かる。すなわち加速空洞位置で見限りベータatron振動とシンクロtron振動は、各々の 2×2 周回行列を使い、独立に運動を追跡できる。ここでは(2.132)式の 2×2 周回行列を使い、既に学んだベータatron振動で用いた方法を適用してシンクロtron振動を調べる。

$$M_{2syn} = \begin{pmatrix} 1 & \\ \frac{-q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) & 1 - g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) \end{pmatrix} \tag{2.132}$$

位相安定性とトランジションエネルギー

振動の安定条件は、Floquetの定理で学んだように周回行列の跡の絶対値が2を越えないことであり、(2.133)式にその条件を明示する。

$$0 \leq g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) \leq 4 \tag{2.133}$$

この安定性条件を定性的に解釈してみる。 $g < 0$ の場合には、 $\Delta p > 0$ の粒子の周回時間が参照運動量粒子より遅れる。安定振動のためには高いエネルギーを持つ粒子の加速は相対的に少なくなければならないから、速く到達した粒子をより多く加速する高周波電場の位相 $q\dot{V}_{RF}(t_0) < 0$ で運動が安定である。速度が殆ど光速に達しているため、周回時間が運動量偏差に依存した周長だけで決まる超相対論的粒子の加速は、このような状況下で行われる。

一方、運動量増加に伴う速度増加が大きい低エネルギー領域のビーム加速では、あるいは運動量に伴う経路長増加が無い直線加速器では $g > 0$ であり、遅く到達した粒子をより多く加速する高周波電場の位相 $q\dot{V}_{RF}(t_0) > 0$ でシンクロtron振動が安定である。

陽子シンクロtronでは低エネルギーで入射したビームを高エネルギーまで加速する。このとき加速途中で g の符号が正から負へ変わる場合がある。この変わり目のビームエネルギーのことをトランジションエネルギーと呼び、安定加速のために、ここで高周波位相を大きく変えてやらなければならない。

歴史的には強収束加速器の発明と共にトランジションエネルギーの存在が問題となった。ブルックヘブン国立研究所 (BNL) の AGS や欧州原子核研究所 (CERN) の CPS などの陽子シンクロトロンはこの現象を念頭に起きつつも敢えてトランジションエネルギーを有する設計で作られている。しかし加速中トランジションエネルギーの前後では、ビーム不安定現象が生じやすく、ビーム損失やエミッタンス増大につながりがちである。現在茨城県東海村で建設進行中の大強度陽子加速器施設 (J-PARC) の陽子シンクロトロンでは特殊なビーム光学系を採用することでトランジションエネルギーを避ける工夫が為されている。

振動数と Twiss パラメーター

ベータatron振動の周回行列要素をベータatron振動数や Twiss パラメーターで表現した (2.95) 式に倣い、シンクロトロン振動の周回行列要素 (2.132) 式からシンクロトロン振動数 ν_s (2.134) 式やシンクロトロン振動を表現する Twiss パラメーター β_s 、 α_s そして γ_s (2.136) 式を求める事ができる。

$$\begin{cases} \cos 2\pi\nu_s = 1 - \frac{1}{2} \left\{ g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) \right\} \\ \sin 2\pi\nu_s = \frac{g}{|g|} \sqrt{g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) - \frac{1}{4} \left\{ g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) \right\}^2} \end{cases} \quad (2.134)$$

シンクロトロン振動の角速度は、コサイン関数の展開から次のように近似され見慣れた表現を得る。またサイン項の符号から判るように、シンクロトロンチューン ν_s の符号は g の符号と同じである。通常の円形加速器におけるシンクロトロンチューンの絶対値は 1 に比べかなり小さいものである *16。

$$\Omega_s \equiv 2\pi\nu_s \approx \sqrt{g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0)} \quad (2.135)$$

シンクロトロン振動に関する Twiss パラメーターを露わに求め同様の近似を適用したものが次式である。

$$\begin{cases} \beta_s = \frac{|g|}{\sqrt{g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) - \left(\frac{1}{2} g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) \right)^2}} \approx \frac{g}{2\pi\nu_s} \\ \alpha_s = \frac{1}{2} \frac{|g| \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0)}{\sqrt{g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) - \left(\frac{1}{2} g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) \right)^2}} \approx 0 \\ \gamma_s = \frac{g}{|g|} \frac{\frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0)}{\sqrt{g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) - \left(\frac{1}{2} g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) \right)^2}} \approx \frac{2\pi\nu_s}{g} \end{cases} \quad (2.136)$$

*16 CERN の LEP や KEK の TRISTAN は ν_s の値が 0.1 程度に達し例外的に大きかった。これは電子 (陽電子) ビームを与えられた周長の中で到達可能な究極の高エネルギーにまで加速蓄積するため、一周当たり 1% を越える放射エネルギー損失を補うための特に高い高周波加速電圧が使われていたためである。

一粒子がシンクロトン振動を通じて到達する最大時間偏差と最大運動量偏差の比率は、Twiss パラメータを使って次のように求めることができる^{*17}。

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)_{max}}{\left(v_0\tau\right)_{max}} &= \sqrt{\frac{\gamma_s}{\beta_s}} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0)}{g}} \approx \frac{2\pi\nu_s}{g} \end{aligned} \quad (2.137)$$

これまで g で表してきた長さの次元を持つ量の物理的成り立ちを考えてみると、次式で表現されるように、運動量偏差に伴う粒子運動の軌道長偏差 ΔL と速度偏差 Δv とから成ることが理解される。ここで周長 L は基準粒子が加速器を一周する軌道長である。

$$\frac{g}{L} = \left(\frac{\Delta v}{v_0} - \frac{\Delta L}{L}\right) / \left(\frac{\Delta p}{p_0}\right) \quad (2.138)$$

このうち運動量偏差に伴う速度偏差の係数は相対論的運動学から次の様に与えられる。

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{\Delta p}{p_0} \quad (2.139)$$

さらに運動量偏差と軌道長偏差間の比例係数はモメンタムコンパクション係数と呼ぶ無次元量 α を導入して表現される。

$$\alpha \equiv \frac{\Delta L/L}{\Delta p/p_0} \quad (2.140)$$

これにより g は次の様に分解して書き下される。さらに $\gamma_{tr} \equiv \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ と定義される係数を導入する事で、ビームの加速中にビームエネルギーの相対論係数 γ_0 が γ_{tr} を通過するとき g の符号反転が起こる事が示される。すなわち先に触れた安定なシンクロトン振動位相にトランジションが生じるビームエネルギーの相対論係数は γ_{tr} ということになる。

$$\begin{aligned} \frac{g}{L} &= \frac{1}{\gamma_0^2} - \alpha \\ &= \frac{1}{\gamma_0^2} - \frac{1}{\gamma_{tr}^2} \equiv -\eta \end{aligned} \quad (2.141)$$

ここで新たに定義された無次元量 η は slippage factor と呼ばれ、運動量偏差から生じる時間偏差を与える係数である。ハドロン加速器ではお馴染みの呼び名であるが、電子加速器ではモメンタムコンパクション係数 α と殆ど同じ量でありこのように呼ばれることは少ない。

^{*17} ここから、加速電圧勾配を保ったトランジションエネルギー通過に際し、ビームエネルギー広がりが増大する一方、パンチ長（高周波位相に捕捉された進行方向ビーム長）は短縮することが分かる。これはビーム不安定現象の要因となる。

第3章

シンクロトロン放射の特性

3.1 シンクロトロン放射計算の基礎

3.1.1 Maxwell の方程式から Feynmann 表現へ

Maxwell の方程式から波動方程式へ

真空中の Maxwell の方程式から出発しよう。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 & \text{Faraday の電磁誘導の法則} \\ \text{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{磁場に関するガウスの法則} \\ \text{rot} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) & \text{アンペール・マクスウェルの法則} \\ \text{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{x}, t) & \text{電場に関するガウスの法則} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

ここで \mathbf{E} は電界強度 [V/m]、 \mathbf{B} は磁束密度 [T]、 \mathbf{i} は電流密度 [A/m²]、 ρ は電荷密度 [C/m³]、 ϵ_0 は真空の誘電率 [F/m]、 μ_0 は透磁率 [H/m]、 \mathbf{x} は位置 [m]、 t は時間 [sec]、 c は光速 [m/sec] を表す。この Maxwell の方程式は線形方程式である事に留意しておこう。またアンペール・マクスウェルの法則の両辺の div に、電場に関するガウスの法則を代入すれば次の関係が導かれ、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \text{div} \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (3.2)$$

電荷密度と電流密度は互いに無関係ではなく、電荷が保存するように決まるべき事が示されている。即ち Maxwell の方程式は電荷保存則を内包している。

磁場に関するガウスの法則は単磁極が発見されない実験事実を表現しており、磁場には湧き出しが無い。このような場は次式の形で表現できる事が数学的に知られており、ここで導入される $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ はベクトルポテンシャルと呼ばれる。

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \text{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (3.3)$$

上式を (3.1) 式中 Faraday の電磁誘導の法則に代入すれば、左辺が渦無し場である事が分かり、電場が次のように表現できる。ここで導入する $\phi(\mathbf{x}, t)$ をスカラーポテンシャルと

呼ぶ。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \text{grad}\phi(\mathbf{x}, t) \quad (3.4)$$

この様に (3.3) と (3.4) で与えられた電磁場を、Maxwell 方程式の残る 2 式に代入する。さらに、ローレンツ変換で不変な Lorentz ゲージ条件 (3.5) に依ってポテンシャルの持つ冗長な自由度を抑制する。

$$\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (3.5)$$

若干のベクトル代数演算の後、電荷密度と電流密度を発生源とする波動方程式でポテンシャルが決定される事が分かる。デカルト座標の場合、この波動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{x}, t) \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = -\mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (3.6)$$

Δ は (3.7) 式で定義されるデカルト座標系におけるラプラシアンである。

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.7)$$

波動方程式の解の中で、発生源から出発して伝搬していくものを選択する。電荷および電流密度が与えられれば、このように因果律に従うスカラーおよびベクトルポテンシャルは遅延ポテンシャルと呼ばれる遅延 Green 関数 (3.8) 式によって計算することができる。

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t-t' - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \rho(\mathbf{x}', t') \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t-t' - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \mathbf{i}(\mathbf{x}', t') \end{cases} \quad (3.8)$$

ここで $\delta(t)$ は Dirac のデルタ関数である。

運動点電荷が作る電磁場ポテンシャル

電荷 e を持ち軌道 $\mathbf{r}(t')$ に沿って運動する点電荷を源とする電荷密度と電流密度は (3.9) 式のように表現することができる。

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{x}', t') = e\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')) \\ \mathbf{i}(\mathbf{x}', t') = e\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')) \frac{d}{dt'} \mathbf{r}(t') \end{cases} \quad (3.9)$$

このとき (3.8) 式で定義された遅延ポテンシャルは (3.10) 式の形に書ける。

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t-t' - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')) \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t-t' - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')) \frac{d}{dt'} \mathbf{r}(t') \end{cases} \quad (3.10)$$

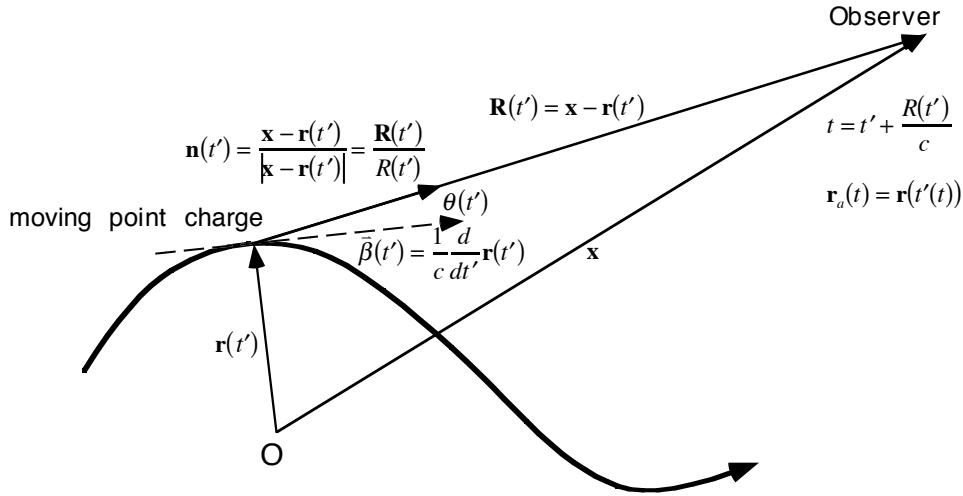


図 3.1 運動点電荷と観測者の位置関係記述法

運動点電荷と観測者の位置関係を図 3.1 に示す。

ここで t' は点電荷の発光体時間を t は観測者の観測者時間を表すものとする。時刻 t' に放射された光が観測者に届く時刻 t は (3.11) 式で与えられる。

$$t = t' + \frac{R(t')}{c} \tag{3.11}$$

そのため観測者には点電荷の運動が (3.12) 式のように見える。

$$\mathbf{r}_a(t) = \mathbf{r}(t(t')) \tag{3.12}$$

これを点電荷の「見かけの運動」と呼ぶことにする。

図 3.1 に基づいて、点電荷と観測者の位置関係の記述方法を導入する。

$$\begin{cases} \mathbf{R}(t') = \mathbf{x} - \mathbf{r}(t') \\ \mathbf{n}(t') = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|} = \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')} \end{cases} \tag{3.13}$$

また時間変換係数 (scale change factor) $\kappa(t')$ を (3.15) 式により導入する。^{*1}

$$\kappa(t') \equiv \frac{dt}{dt'} = \frac{d}{dt'} \left\{ t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|}{c} \right\} = 1 - \frac{1}{c} \mathbf{n}(t') \cdot \frac{d}{dt'} \mathbf{r}(t') = 1 - \mathbf{n}(t') \cdot \vec{\beta}(t') \tag{3.15}$$

^{*1} 本文の流れを損なわないように、脚注で演算展開の詳細を示す。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} |\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')| &= \frac{d}{dt'} \{ (\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')) \}^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt'} \frac{ \{ (\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')) \} }{ \sqrt{ \{ (\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')) \} } } \\ &= - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|} \cdot \frac{d}{dt'} \mathbf{r}(t') = -\mathbf{n}(t') \cdot \frac{d}{dt'} \mathbf{r}(t') \end{aligned} \tag{3.14}$$

点電荷が観測者に正面から光速に近い速さで近づくと、時間変換係数 $\kappa(t')$ は非常にゼロに近くなる事に留意して置いて欲しい。これは相対論的な光のドップラーシフトを示す量である。

点電荷の運動から生じる (3.10) 式で表された遅延ポテンシャルを空間積分することにより (3.16) 式で遅延ポテンシャルが書ける。^{*2}

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t-t' - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t-t' - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|} \frac{d}{dt'} \mathbf{r}(t') \end{cases} \quad (3.16)$$

電磁場の発光体時間表現

(3.16) 式から出発して、理解し易く使い易い電場表現を目指して、計算を進める。

■**遅延ポテンシャルの微分** (3.4) 式に従い遅延ポテンシャルから電磁場を導く事ができる。電場を求めるため (3.16) 式に表されたスカラーポテンシャルの空間微分 $grad$ を行う。これは、スカラーポテンシャルが空間的には R のみを通じて定義されている為に (3.17) 式の関係を使って (3.18) 式のように実行される。

$$grad = (gradR) \frac{\partial}{\partial R} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{r}}{R} \frac{\partial}{\partial R} = \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial R} \quad (3.17)$$

$grad\phi(\mathbf{x}, t)$

$$\begin{aligned} &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\delta\left(t-t' - \frac{R}{c}\right)}{R} \right) \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{n} \frac{-1}{R^2(t')} \delta\left(t-t' - \frac{R(t')}{c}\right) + \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{n} \frac{1}{R(t')} \frac{\partial}{\partial R(t')} \delta\left(t-t' - \frac{R(t')}{c}\right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

(3.16) 式に表されたベクトルポテンシャルの時間 t による微分は (3.19) 式のように行うことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu_0 c e}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\vec{\beta}(t')}{R(t')} \frac{\partial}{\partial t} \delta\left(t-t' - \frac{R(t')}{c}\right) \\ &= -\frac{\mu_0 c^2 e}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\vec{\beta}(t')}{R(t')} \frac{\partial}{\partial R(t')} \delta\left(t-t' - \frac{R(t')}{c}\right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

これらを合計して、観測者位置における電場は (3.20) 式で計算される。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -grad\phi(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) =$$

^{*2} 既に図 3.1 に基付いて t と t' の間の関係を説明したが、積分変数としての t' は t とは独立である。この先 δ 関数を含む積分の実行により、(3.23) 式で t と関係づけられる。

$$\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left[\frac{\mathbf{n}(t')}{R^2(t')} \delta\left(t - t' - \frac{R(t')}{c}\right) - \frac{\mathbf{n}(t') - \vec{\beta}(t')}{R(t')} \frac{\partial}{\partial R(t')} \delta\left(t - t' - \frac{R(t')}{c}\right) \right] \quad (3.20)$$

■**遅延ポテンシャルの時間積分** (3.20) 式の形で得られた電場を発光体時間について積分する、(3.20) 式第1項については (3.22) 式になる。^{*3}

$$[(3.20) \text{ 式第1項}] = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n}(t')}{\kappa(t') R^2(t')} \quad (3.22)$$

ここで $t'(t)$ は δ 関数の積分に際して新たに (3.23) 式で定義される観測者時間 t の関数である。即ち特定の観測者時刻 t に届く光の発光体時刻が t' であり、この関係は既に見た (3.11) 式と同じものである。

$$t - t'(t) - \frac{R(t'(t))}{c} = 0 \quad (3.23)$$

(3.20) 式第2項については、 $y = t' + \frac{R(t')}{c}$ と置く事で次のように計算される。^{*4}

$$[(3.20) \text{ 式第2項}] = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\mathbf{n}(t') - \vec{\beta}(t')}{\kappa(t') R(t')} \frac{\partial}{\partial y} \delta(t - y) \quad (3.25)$$

部分積分をして、

$$\begin{aligned} &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\mathbf{n}(t') - \vec{\beta}(t')}{\kappa(t') R(t')} \right\} \delta(t - y) \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\mathbf{n}(t') - \vec{\beta}(t')}{\kappa(t') R(t')} \right\} \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{dt'}{dt} \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ \frac{\mathbf{n}(t') - \vec{\beta}(t')}{\kappa(t') R(t')} \right\} \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ \frac{\mathbf{n}(t') - \vec{\beta}(t')}{\kappa(t') R(t')} \right\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

(3.22) 式と (3.26) 式の和から、最終的に観測者位置における電場は (3.27) 式に与えられる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}(t')}{\kappa(t') R^2(t')} + \frac{1}{c\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ \frac{\mathbf{n}(t') - \vec{\beta}(t')}{\kappa(t') R(t')} \right\} \right] \quad (3.27)$$

^{*3} ここで次の関係を使った。

$$\kappa(t'(t)) = \left[\frac{dt'(t)}{dt} \right]^{-1} \quad (3.21)$$

^{*4} 次の関係を使った。

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial R} &= \frac{1}{c} \\ \frac{dy}{dt'} &= \kappa(t') \end{aligned} \quad (3.24)$$

電磁場の Heaviside-Feynmann 表現

(3.27) 式右辺の電場表現は発光体時間表示であるが、これを観測者時間表示へと変換してみよう。(3.13) 第2式を t' で微分^{*5}、そして (3.15) 式に \mathbf{n} を掛ける事^{*6}により得る (3.30) 式の関係を使うことにより、

$$\mathbf{n} - \vec{\beta} = \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \vec{\beta}) + \kappa \mathbf{n} = \frac{R}{c} \frac{d\mathbf{n}}{dt'} + \kappa \mathbf{n} \quad (3.30)$$

(3.27) 式は (3.31) 式になる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\kappa R^2} \mathbf{n} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\mathbf{n}}{R} \right) + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \mathbf{n} \right) \right] \quad (3.31)$$

(3.31) 式の右辺第1項と第2項の和は (3.34) 式のように計算される。^{*7}

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa R^2} \mathbf{n} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\mathbf{n}}{R} \right) &= \frac{1}{\kappa R^2} \mathbf{n} + \frac{1}{c\kappa} \frac{-1}{R^2} (-c\mathbf{n} \cdot \vec{\beta}) \mathbf{n} + \frac{1}{c\kappa} \frac{1}{R} \frac{d}{dt'} \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{\kappa R^2} \mathbf{n} (1 - \mathbf{n} \cdot \vec{\beta}) + \frac{2}{\kappa R^2} \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \vec{\beta}) + \frac{1}{c\kappa} \frac{1}{R} \frac{d}{dt'} \mathbf{n} \\ &= \frac{\mathbf{n}}{R^2} - \frac{2}{\kappa R^2} \frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} + \frac{1}{c\kappa} \frac{1}{R} \frac{d}{dt'} \mathbf{n} \\ &= \frac{\mathbf{n}}{R^2} + \frac{R}{c\kappa} \left(-2 \frac{\mathbf{n}}{R^3} \frac{dR}{dt'} + \frac{1}{R^2} \frac{d}{dt'} \mathbf{n} \right) \\ &= \frac{\mathbf{n}}{R^2} + \frac{R}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

依って電場は (3.35) 式になる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} + \frac{R}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right) + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \mathbf{n} \right) \right] \quad (3.35)$$

ここで独立変数を発光体時間 t' から、観測者時間 t に変換する。

$$t' \rightarrow t(t') = t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|}{c} \quad (3.36)$$

^{*5} (3.13) 第2式の t' 微分より、

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt'} = -\frac{\mathbf{R}}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{d\mathbf{R}}{dt'} = \frac{c}{R} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \vec{\beta}) \quad (3.28)$$

^{*6} (3.15) 式に \mathbf{n} を掛け、ベクトル公式を使うことで、

$$\kappa \mathbf{n} = \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \vec{\beta}) \mathbf{n} = \mathbf{n} - \{ \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \vec{\beta}) + \vec{\beta} \} \quad (3.29)$$

^{*7} この演算では次の関係を使った。

$$\frac{dR}{dt'} = -c\mathbf{n} \cdot \vec{\beta} \quad (3.32)$$

および

$$\kappa = 1 - \mathbf{n} \cdot \vec{\beta} = 1 + \frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} \quad (3.33)$$

この変換に伴い、発光体時間による微分も観測者時間による微分へと (3.37) 式のように変換される。

$$\frac{1}{\kappa} \frac{d}{dt'} \rightarrow \frac{1}{\kappa} \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{dt} \quad (3.37)$$

この変換を (3.35) 式に施すことで、観測者位置における電場の Feynmann 表現 (3.38) 式に到達する。^{*8}

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} + \frac{R}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{n} \right] \quad (3.38)$$

(3.38) 式によれば、観測者から見た点電荷の運動が、そのまま観測される電場特性に反映する。このために、例えばシンクロトロン放射光の偏光特性などは、観測される点電荷の「見かけの運動」を考える事で殆ど直感的に知ることができる。またこの表現はコンピュータで数値的に電磁場を計算するのに適した形式でもあり、SAD コードの電磁場計算はこの表現に基づいて行われている。

磁場と電場

■放射磁場の計算 当然、電場と同様に、磁場についても計算することができる。導出は電場と同様比較的手間がかかるが、最終的に観測者位置の磁場は (3.39) 式になる。これは電場を与える (3.27) 式に対応した表現である。

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 c e}{4\pi} \left[\frac{\vec{\beta}(t') \times \mathbf{n}(t')}{\kappa(t') R^2(t')} + \frac{1}{c\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ \frac{\vec{\beta}(t') \times \mathbf{n}(t')}{\kappa(t') R(t')} \right\} \right] \quad (3.39)$$

■電場と磁場の関係 (3.39) 式の磁場表現を、 $\vec{\beta}$ を式から消去するという方針の元で変換する。(3.30) 式の関係を使うと (3.39) 式第1項は (3.40) 式になる。

$$\begin{aligned} [(3.39) \text{ 式角カッコ内第1項}] &= \frac{1}{\kappa R^2} \left(-\frac{R}{c} \frac{d\mathbf{n}}{dt'} + (1 - \kappa) \mathbf{n} \right) \times \mathbf{n} \\ &= -\frac{1}{c\kappa R} \frac{d\mathbf{n}}{dt'} \times \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.40)$$

(3.40) 式に展開された代数計算の結果を使うことで (3.39) 式第2項は (3.41) 式になる。

$$\begin{aligned} [(3.39) \text{ 式角カッコ内第2項}] &= -\frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{c\kappa} \frac{d\mathbf{n}}{dt'} \times \mathbf{n} \right) \\ &= -\frac{1}{c\kappa} \left\{ \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{c\kappa} \frac{d\mathbf{n}}{dt'} \right) \times \mathbf{n} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d\mathbf{n}}{dt'} \times \frac{d\mathbf{n}}{dt'} \right\} \\ &= -\frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{c\kappa} \frac{d\mathbf{n}}{dt'} \right) \times \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.41)$$

^{*8} この表現は R. Feynmann の物理学教科書で紹介されたため良く知られているが、既に、その昔 O. Heaviside が発見していたものである。

このようにして得た (3.39) 式角カッコ内第1項と第2項の和を取ることで、(3.39) 式は (3.42) 式になる。

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\mu_0 c e}{4\pi} \left[\frac{1}{c\kappa R} \frac{d\mathbf{n}}{dt'} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{c\kappa} \frac{d\mathbf{n}}{dt'} \right) \right] \times \mathbf{n} \\ &= \mathbf{n} \times \frac{\mu_0 c e}{4\pi} \left[\frac{1}{c\kappa R} \frac{d\mathbf{n}}{dt'} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{c\kappa} \frac{d\mathbf{n}}{dt'} \right) \right]\end{aligned}\quad (3.42)$$

ここで電場との比較をするために (3.31) 式の電場表現を思い出そう。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\kappa} \frac{\mathbf{n}}{R^2} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\mathbf{n}}{R} \right) + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \mathbf{n} \right) \right]\quad (3.43)$$

第2項を (3.44) 式のように変換する。

$$[(3.43) \text{ 式角カッコ内第2項}] = \frac{1}{c\kappa} \left\{ \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{R} \right) \mathbf{n} + \frac{1}{R} \frac{d\mathbf{n}}{dt'} \right\}\quad (3.44)$$

このようにして (3.45) 式を得る。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\kappa} \frac{\mathbf{n}}{R^2} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{R} \right) \mathbf{n} + \frac{1}{c\kappa R} \frac{d\mathbf{n}}{dt'} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \mathbf{n} \right) \right]\quad (3.45)$$

(3.45) 式と \mathbf{n} との外積をとり (3.42) 式に示される磁場と比較する事で磁場と電場の関係が分かる。磁場と電場は互いに直交し、また磁場は進行方向 \mathbf{n} に直交した場の成分のみを有する横波であることが示されている。電場成分についてはクーロン場に相当する部分は進行方向に平行だが、放射として遠くまで伝搬する成分は磁場と同様に横波である。

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{n} \times \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{c\kappa R} \frac{d\mathbf{n}}{dt'} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{c\kappa} \frac{d\mathbf{n}}{dt'} \right) \right] \\ &= \mathbf{n} \times \frac{\mu_0 e c^2}{4\pi} \left[\frac{1}{c\kappa R} \frac{d\mathbf{n}}{dt'} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{c\kappa} \frac{d\mathbf{n}}{dt'} \right) \right] = c\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\quad (3.46)$$

3.1.2 シンクロトロン放射の解析的計算の方法

一般公式

すでに求めた発光体時間表示の電場表現 (3.27) 式から出発して、(3.47) 式を導いておく*9。ここでドットは発光体時間微分を表す。

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}(t')}{\kappa(t') R^2(t')} + \frac{1}{c\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ \frac{\mathbf{n}(t') - \vec{\beta}(t')}{\kappa(t') R(t')} \right\} \right] \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{R^2 \kappa^3} (\mathbf{n} - \vec{\beta}) + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{R \kappa^3} \mathbf{n} \times \left[\mathbf{n} \times \left\{ \kappa \dot{\vec{\beta}} + (\mathbf{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \vec{\beta} \right\} \right]\end{aligned}\quad (3.47)$$

*9 この (3.47) 式の導出は示さないが、かなり長い数式展開が必要である。

遠距離場近似

これから展開する解析的取り扱いの基礎として (3.48) 式に示される遠距離場近似を使うことになる。

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{n}R_0 \\ R_0 \rightarrow \infty \\ |\mathbf{r}(t')|/R_0 \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

この内容を言葉で言えば、次のようになる。^{*10}

- 光を受けている間、発光体と観測者の位置関係を表すベクトル \mathbf{n} は不変であること。
- 発光体と観測者の距離は充分離れていること。
- 光を受けている間、発光体と観測者の距離が変わらないこと。

加速度運動

R_0 が大きいと言う条件により、(3.47) 式の第1項は $O(R_0^{-2})$ ゆえ無視できる。

$$\lim_{R_0 \rightarrow \infty} R_0 \mathbf{E}(\mathbf{n}R_0, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{\kappa^3} \mathbf{n} \times \left[\mathbf{n} \times \left\{ \kappa \dot{\vec{\beta}} + \left(\mathbf{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right) \vec{\beta} \right\} \right] \equiv \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \mathbf{a} \quad (3.49)$$

これにより運動粒子の横方向加速度運動を表す \mathbf{a} は (3.50) 式のように定義されたことになる。

$$\mathbf{a} = \frac{c}{\kappa^3} \mathbf{n} \times \left[\mathbf{n} \times \left\{ \kappa \dot{\vec{\beta}} + \left(\mathbf{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right) \vec{\beta} \right\} \right] \quad (3.50)$$

後の周波数領域の計算上便利なように (3.50) 式とは違う \mathbf{a} の表式を導出しておく。(3.51) 式の関係が導かれるが、この第2項は $R \rightarrow \infty$ という条件下で無視することができる。これを (3.50) 式に代入することで新たな \mathbf{a} の表式 (3.52) 式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\kappa} \vec{\beta} \right) &= \frac{1}{\kappa^2} \left\{ \frac{c}{R} \mathbf{n} \times \left(\mathbf{n} \times \vec{\beta} \right) \cdot \vec{\beta} + \mathbf{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right\} \vec{\beta} + \frac{1}{\kappa} \dot{\vec{\beta}} \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \left\{ \kappa \dot{\vec{\beta}} + \left(\mathbf{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right) \vec{\beta} \right\} + \frac{1}{\kappa^2} \frac{c}{R} \left\{ \mathbf{n} \times \left(\mathbf{n} \times \vec{\beta} \right) \cdot \vec{\beta} \right\} \vec{\beta} \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\mathbf{a} = c \mathbf{n} \times \left\{ \mathbf{n} \times \frac{1}{\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\kappa} \vec{\beta} \right) \right\} \quad (3.52)$$

放射のパワー

ポインティングベクトルを計算する。ここでは既に求めた電場と磁場の関係 (3.46) 式を使って電場のみで表そう。

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \times \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E})$$

^{*10} これらの条件が成立しない場合を考えると、近似の意味がより明確になる。例えば、アンジュレータのように長い発光体の光を斜め方向から観測する時、また正面の場合でもアンジュレータの長さ程度の近距離から観測する時などには遠距離場近似が成立しない。

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mu_0 c} \{ \mathbf{n} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \} \\
&\approx \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{n} |\mathbf{E}|^2 = \varepsilon_0 c \mathbf{n} |\mathbf{E}|^2
\end{aligned} \tag{3.53}$$

電子1個当たりの角密度パワー (Angular Power Density) は次のように \mathbf{a} を使って与えられる。

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 W}{d^2 \Omega} &= \lim_{R_0 \rightarrow \infty} R_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dt \\
&= \varepsilon_0 c \int_{-\infty}^{+\infty} |R_0 \mathbf{E}|^2 dt \\
&= \varepsilon_0 c \left(\frac{e}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{a}|^2 dt
\end{aligned} \tag{3.54}$$

平行運動をする即ち角度発散のない*11電子からなる電流 I のビームは、干渉性放射条件を満たさない限り*12、(3.55) 式の角密度パワーの放射をする。

$$\frac{d^2 P}{d^2 \Omega} = \varepsilon_0 c \left(\frac{e}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \right)^2 \frac{I}{e} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{a}|^2 dt \tag{3.55}$$

放射のスペクトル

電場のフーリエ変換を (3.56) 式により導入する。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} \tag{3.56}$$

Parseval の等式 (3.57) 式を利用することで、周波数表示電場と時間表示電場が関係づけられる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)|^2 d\omega = 2 \int_0^{\infty} |\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)|^2 d\omega \tag{3.57}$$

周波数表示による電場を使って電子1個当たりの角密度パワーが (3.58) 式で与えられる。これは (3.54) 式を別の方法で表現したことになる。

$$\frac{d^2 W}{d^2 \Omega} = \lim_{R_0 \rightarrow \infty} \varepsilon_0 c \int_{-\infty}^{\infty} |R_0 \mathbf{E}(\mathbf{n}R_0, t)|^2 dt = \lim_{R_0 \rightarrow \infty} 2\varepsilon_0 c \int_0^{\infty} |R_0 \mathbf{E}(\mathbf{n}R_0, \omega)|^2 d\omega \tag{3.58}$$

(3.58) 式は周波数を含んだ表示なので、周波数で微分することでその情報を取り出すことができる。すなわち電子1個当たりの角密度パワースペクトルが (3.59) 式で与えられる。

$$\frac{d^3 W}{d\omega d^2 \Omega} = 2\varepsilon_0 c \lim_{R_0 \rightarrow \infty} |R_0 \mathbf{E}(\mathbf{n}R_0, \omega)|^2 \tag{3.59}$$

*11 角度の拡がりのないことだけが条件のように聞こえるが、遠距離場近似により電子ビームサイズは既に無限小が仮定されている。

*12 以下の計算は単一電子による放射を基礎にしている事に留意してほしい。この仮定に基づいて、スペクトルや光の角度発散などを計算することになる。異なる電子から放射される光子間に相関がある自由電子レーザーなどの場合にはこの仮定は成り立たない。

次の一連の代数計算によって、周波数表示電場の具体的な形を求めよう。まず (3.56) 式から出発して (3.49) 式と (3.52) 式を順次代入する。その後、積分変数を t から t' に変更して部分積分を実行することで (3.60) 式を得る。

$$\begin{aligned}
R_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt R_0 \mathbf{E}(\mathbf{n}R_0, t) e^{i\omega t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \mathbf{a} e^{i\omega t} \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{n} \times \left\{ \mathbf{n} \times \frac{1}{\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\kappa} \vec{\beta} \right) \right\} e^{i\omega t} \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{n} \times \left\{ \mathbf{n} \times \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\kappa} \vec{\beta} \right) \right\} e^{i\omega t(t')} \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{n} \times \left\{ \mathbf{n} \times \left(\frac{1}{\kappa} \vec{\beta} \right) e^{i\omega t(t')} \right\} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
&\quad - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{n} \times \left\{ \mathbf{n} \times \left(\frac{1}{\kappa} \vec{\beta} \right) i\omega \frac{dt}{dt'} e^{i\omega t(t')} \right\} \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{n} \times \left\{ \mathbf{n} \times \vec{\beta} e^{i\omega t(t')} \right\}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

ここで (3.61) 式によって $\mathbf{A}(\omega)$ を定義する。

$$\mathbf{A}(\omega) \equiv \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{n} \times \left\{ \mathbf{n} \times \vec{\beta} e^{i\omega t(t')} \right\} \tag{3.61}$$

電子1個当たりの角密度パワースペクトル (Angular Spectral Power Density) が (3.62) 式で与えられる。

$$\frac{d^3 W}{d\omega d^2 \Omega} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c} |\mathbf{A}(\omega)|^2 \tag{3.62}$$

そして電流 I の平行運動電子ビームから生まれる角密度パワースペクトル (Spectral Angular Power Density) は (3.63) 式に与えられる。

$$\frac{d^3 P}{d\omega d^2 \Omega} = \frac{I}{e} \frac{d^3 W}{d\omega d^2 \Omega} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} I |\mathbf{A}(\omega)|^2 \tag{3.63}$$

(3.63) 式を充分狭い帯域 $\Delta\omega$ で積分してから、光子エネルギー $\hbar\omega$ で割ることで、そのエネルギー帯域内の光子数が算出できる。そして角密度光子数スペクトル (Spectral Angular Flux Density) \mathcal{F} が (3.64) 式に与えられる。

$$\frac{d^2 \mathcal{F}}{d^2 \Omega} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} I |\mathbf{A}(\omega)|^2 \frac{\Delta\omega}{\hbar\omega} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{I}{e} |\mathbf{A}(\omega)|^2 = \alpha \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{I}{e} |\mathbf{A}(\omega)|^2 \tag{3.64}$$

ここで α は微細構造定数である。

3.1.3 偏光ベクトルと電磁場計算公式

放射電場を記述するために偏光ベクトルを導入する。発光体時間で表示された荷電粒子の軌跡から、時間領域および周波数領域で電場を計算するための一般公式を導く。

偏光ベクトル

具体的な粒子の運動軌跡を元に、発生するシンクロトロン放射光の特性を計算するには観測者の位置を知らなければならない。放射光を観測する座標系を導入する必要がある。荷電粒子の運動を記述する座標系と観測者座標系との関係を図 3.2 に示す。この図の中にある観測者位置を示す単位ベクトル \mathbf{n} は (3.13) 式で定義されたものである。以下の取り扱いでは、ヘリカルアンジュレータのように荷電粒子の運動が平面上に留まらない場合も扱えるよう考慮しておく。

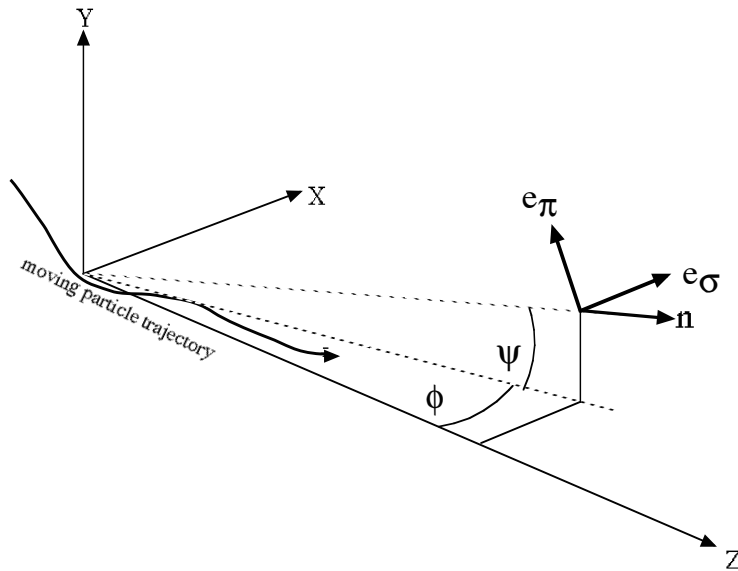


図 3.2 運動粒子座標系と観測者座標系

これらの座標系同士は2度に渡る回転によって結ばれている。即ち、(3.65) 式に示すように、運動粒子座標系の単位ベクトル $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ を y 軸の回りに ϕ 回転させ次に x 軸の回りで ψ 回転させると観測者座標系の単位ベクトル $(\mathbf{e}_\sigma, \mathbf{e}_\pi, \mathbf{n})$ と一致する。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\sigma \\ \mathbf{e}_\pi \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ -\sin \psi \sin \phi & \cos \psi & -\sin \psi \cos \phi \\ \cos \psi \sin \phi & \sin \psi & \cos \psi \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.65)$$

このとき、観測者位置を示す単位ベクトル \mathbf{n} は (x, y, s) 座標系の単位ベクトルを使って (3.66) 式で表される。

$$\mathbf{n} = \cos \psi \sin \phi \mathbf{e}_x + \sin \psi \mathbf{e}_y + \cos \psi \cos \phi \mathbf{e}_z \quad (3.66)$$

光速度 c で割った速度ベクトル $\vec{\beta}$ の (x, y, s) 座標系での成分は (3.67) 式である。ここ

で $\vec{\beta}$ は β_x と β_y を通じてのみ変化している。

$$\vec{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z) = \left(\beta_x, \beta_y, \sqrt{1 - (\gamma^{-2} + \beta_x^2 + \beta_y^2)} \right) \quad (3.67)$$

ここで γ は運動粒子の相対論係数である。

時間変換係数 κ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \kappa &= 1 - \vec{\beta} \cdot \mathbf{n} \\ &= 1 - \beta_x \cos \psi \sin \phi - \beta_y \sin \psi - \sqrt{1 - (\gamma^{-2} + \beta_x^2 + \beta_y^2)} \cos \psi \cos \phi \end{aligned} \quad (3.68)$$

発光体時間 t' による $\vec{\beta}$ の微分 (ドットで表す) を計算すると。

$$\dot{\vec{\beta}} = \dot{\beta}_x \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \beta_x} + \dot{\beta}_y \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \beta_y} = \left(\dot{\beta}_x, \dot{\beta}_y, \frac{-\beta_x \dot{\beta}_x - \beta_y \dot{\beta}_y}{\sqrt{1 - \beta_x^2 - \beta_y^2 - \gamma^{-2}}} \right) \quad (3.69)$$

また \mathbf{n} との内積は、

$$\dot{\vec{\beta}} \cdot \mathbf{n} = \dot{\beta}_x \cos \psi \sin \phi + \dot{\beta}_y \sin \psi - \frac{\beta_x \dot{\beta}_x + \beta_y \dot{\beta}_y}{\sqrt{1 - \beta_x^2 - \beta_y^2 - \gamma^{-2}}} \cos \psi \cos \phi \quad (3.70)$$

任意ベクトル $\mathbf{b} = b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z$ は (3.66) 式で定義された \mathbf{n} と次の表式を満たす。

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{b}) &= (-b_x \cos \phi + b_z \sin \phi) \mathbf{e}_\sigma + (b_x \sin \phi \sin \psi - b_y \cos \psi + b_z \cos \phi \sin \psi) \mathbf{e}_\pi \\ &\approx (-b_x + b_z \phi) \mathbf{e}_\sigma + (-b_y + b_z \psi) \mathbf{e}_\pi \end{aligned} \quad (3.71)$$

放射光電場がこのように表された場合、電場の \mathbf{n} 成分が存在しないことに注意しよう。既に述べたように、点電荷からの放射光は常に横波である。 \mathbf{e}_σ および \mathbf{e}_π は単位偏光ベクトルと呼び、各々 σ 偏光成分と π 偏光成分を表示する為に用いられる。

時間領域の電場計算

時間領域での電場計算に際しては、(3.50) 式で与えられる \mathbf{a} を計算するため \mathbf{b} として (3.72) 式を使えばよい。

$$\mathbf{b} \equiv \frac{\dot{\vec{\beta}} \kappa + (\mathbf{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \vec{\beta}}{\kappa^3} \quad (3.72)$$

このとき、 \mathbf{b} は (3.67) 式から (3.70) 式の間求めた結果を代入することで (x, y, s) 座標系の成分を使って (3.73) 式で表現される。

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} &= \frac{\dot{\beta}_x}{\kappa^3} \begin{pmatrix} \kappa - \frac{\beta_x^2 \cos \phi \cos \psi}{\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2-\gamma^{-2}}} + \beta_x \cos \psi \sin \phi \\ -\frac{\beta_x \beta_y \cos \phi \cos \psi}{\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2-\gamma^{-2}}} + \beta_y \cos \psi \sin \phi \\ \frac{-\kappa \beta_x}{\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2-\gamma^{-2}}} - \beta_x \cos \psi \cos \phi + \sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2-\gamma^{-2}} \cos \psi \sin \phi \end{pmatrix} \\
&+ \frac{\dot{\beta}_y}{\kappa^3} \begin{pmatrix} -\frac{\beta_x \beta_y \cos \phi \cos \psi}{\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2-\gamma^{-2}}} + \beta_x \sin \psi \\ \kappa - \frac{\beta_y^2 \cos \phi \cos \psi}{\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2-\gamma^{-2}}} + \beta_y \sin \psi \\ \frac{-\kappa \beta_y}{\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2-\gamma^{-2}}} - \beta_y \cos \psi \cos \phi + \sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2-\gamma^{-2}} \sin \psi \end{pmatrix} \\
&\approx \frac{\dot{\beta}_x}{\kappa^3} \begin{pmatrix} \kappa + (\phi - \beta_x) \beta_x \\ (\phi - \beta_x) \beta_y \\ \phi - \beta_x \end{pmatrix} + \frac{\dot{\beta}_y}{\kappa^3} \begin{pmatrix} (\psi - \beta_y) \beta_x \\ \kappa + (\psi - \beta_y) \beta_y \\ \psi - \beta_y \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.73}$$

(3.73) 式の近似として得た \mathbf{b} の成分表示を (3.71) 式に代入することにより、(3.74) 式を得る。

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{b}) &\approx \left[\frac{\dot{\beta}_x}{\kappa^3} \left\{ (\phi - \beta_x)^2 - \kappa \right\} + \frac{\dot{\beta}_y}{\kappa^3} (\psi - \beta_y) (\phi - \beta_x) \right] \mathbf{e}_\sigma \\
&+ \left[\frac{\dot{\beta}_x}{\kappa^3} (\phi - \beta_x) (\psi - \beta_y) + \frac{\dot{\beta}_y}{\kappa^3} \left\{ (\psi - \beta_y)^2 - \kappa \right\} \right] \mathbf{e}_\pi
\end{aligned} \tag{3.74}$$

(3.74) 式の結果を (3.50) 式と照らし合わせることで、偏光ベクトルを基底として \mathbf{a} を表現できる。これを (3.55) 式に代入することで、各偏光状態に対する電流 I における角密度パワーが (3.75) 式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2 P_\sigma}{d^2 \Omega} \right) &= \varepsilon_0 c \left(\frac{e}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \right)^2 \frac{I}{e} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{|a_\sigma|^2}{|a_\pi|^2} \right) dt \\
&= \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{4\pi c} \frac{I}{e} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left(\frac{\left[\frac{\dot{\beta}_x}{\kappa^3} \left\{ (\phi - \beta_x)^2 - \kappa \right\} + \frac{\dot{\beta}_y}{\kappa^3} (\psi - \beta_y) (\phi - \beta_x) \right]^2}{\left[\frac{\dot{\beta}_x}{\kappa^3} (\phi - \beta_x) (\psi - \beta_y) + \frac{\dot{\beta}_y}{\kappa^3} \left\{ (\psi - \beta_y)^2 - \kappa \right\} \right]^2} \right) \\
&= \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{4\pi c} \frac{I}{e} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{1}{\kappa^5} \left(\frac{\left[\dot{\beta}_x \left\{ (\phi - \beta_x)^2 - \kappa \right\} + \dot{\beta}_y (\psi - \beta_y) (\phi - \beta_x) \right]^2}{\left[\dot{\beta}_x (\phi - \beta_x) (\psi - \beta_y) + \dot{\beta}_y \left\{ (\psi - \beta_y)^2 - \kappa \right\} \right]^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.75}$$

周波数領域の電場計算

周波数領域における電場計算のためには、(3.61) 式の $\mathbf{A}(\omega)$ の定義より、 \mathbf{b} として次のものを使えばよい事が判る。

$$\mathbf{b} \equiv \vec{\beta} \approx \left(\beta_x, \beta_y, 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{1}{2}\beta_x^2 - \frac{1}{2}\beta_y^2 \right) \quad (3.76)$$

これを (3.71) 式に代入すると、

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{b}) \approx (\phi - \beta_x) \mathbf{e}_\sigma + (\psi - \beta_y) \mathbf{e}_\pi \quad (3.77)$$

これを (3.61) 式に代入して得る $\mathbf{A}(\omega)$ を (3.64) 式に代入すれば、各偏光状態に対する電流 I における角密度光子数スペクトルは次式で書ける。

$$\left(\frac{d^2 \mathcal{F}_\sigma}{d^2 \Omega} \right) = \alpha \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{I}{e} \left(\frac{|A_\sigma(\omega)|^2}{|A_\pi(\omega)|^2} \right) = \alpha \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{I}{e} \left(\frac{\left| \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' (\phi - \beta_x) e^{i\omega t(t')} \right|^2}{\left| \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' (\psi - \beta_y) e^{i\omega t(t')} \right|^2} \right) \quad (3.78)$$

3.2 偏向磁石のシンクロトロン放射

偏向磁石から出てくるシンクロトロン放射光は、歴史的には、高エネルギーを追求する電子シンクロトロンないし電子陽電子衝突型貯蔵リングのビームエネルギーを制限する要因としての意味合いが強かった。しかしこの一見邪魔者であった放射光を積極的に利用するという発想の転換により、今日に至る放射光科学建設が始まった訳である。

しかしながら今日においても、偏向磁石から出てくる放射光の重要性は、電子ビーム特性に対する影響という面で大きい。具体的な電子ビームへの影響評価については次の章で学ぶとして、ここではその基礎となる偏向磁石放射光の特性を調べる。

3.2.1 電子の軌跡と「見かけの運動」

電子の軌跡

まず偏向磁石において電子が描く軌跡を求める。磁場 $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z) = (0, B, 0)$ によるローレンツ力から運動方程式を書き下すと。

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt'} = m_e \gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt'} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = e(-v_z B, 0, v_x B) \quad (3.79)$$

ここでは (x, y, z) カーテシアン座標系を使うことにする^{*13}。(3.79) 式を座標成分で書くと、

$$\ddot{\mathbf{r}} \equiv \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt'^2} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = \frac{eB}{m_e \gamma} (-\dot{z}, 0, \dot{x}) \quad (3.80)$$

m_e は電子の静止質量、 e は電荷、 γ は相対論係数である。ここで、曲率半径と回転周波数を定義しておく。

$$\rho \equiv \frac{m_e \gamma c \beta}{eB} \quad \text{曲率半径} \quad (3.81)$$

^{*13} 荷電粒子ビーム運動の記述の時とは異なり、ここでは時間が前面に登場する必要がある。そして粒子運動を記述するときには発光体時間 t' を使う。

$$\omega_\rho \equiv \frac{c\beta}{\rho} \quad \text{回転周波数} \quad (3.82)$$

これにより (3.80) 式を書き直すと、

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_\rho \dot{z} \\ \ddot{z} = \omega_\rho \dot{x} \end{cases} \quad (3.83)$$

時間で積分すると、

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega_\rho z \\ \dot{z} = \omega_\rho x \end{cases} \quad (3.84)$$

これを (3.83) 式の右辺に代入すると、2個の調和振動子の式に導かれる。

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_\rho^2 x \\ \ddot{z} = -\omega_\rho^2 z \end{cases} \quad (3.85)$$

これを図 3.3 に示される初期条件の元で解くと、電子の軌跡を (3.86) 式で得る。

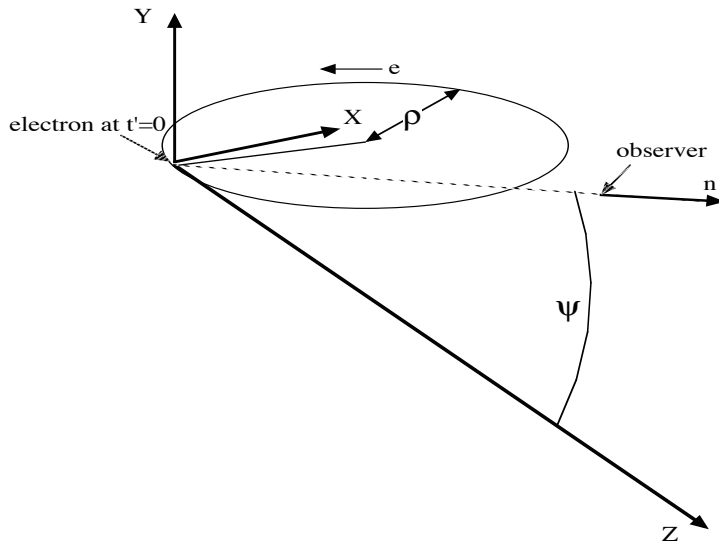


図 3.3 偏向磁石放射光の座標系

$$\mathbf{r}(t') = \rho(1 - \cos(\omega_\rho t'), 0, \sin(\omega_\rho t')) \quad (3.86)$$

また速度は次のようになる。

$$\vec{\beta}(t') \equiv \dot{\mathbf{r}}(t')/c = \beta(\sin(\omega_\rho t'), 0, \cos(\omega_\rho t')) \quad (3.87)$$

見かけの運動

観測者から見た電子軌跡の「見かけの運動」を次の条件で成立する近似を使って求める。

$$\omega_\rho t' \ll 1, \quad 1/\gamma \ll 1 \quad (3.88)$$

まず速度は、

$$\vec{\beta}(t') \approx \left(\omega_\rho t', 0, 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{(\omega_\rho t')^2}{2} \right) \quad (3.89)$$

観測者位置を示す \mathbf{n} ベクトルは上下から見込む角度が小さいという条件で、

$$\mathbf{n} \approx \left(0, \psi, 1 - \frac{\psi^2}{2} \right) \quad (3.90)$$

これらの近似の下で時間変換係数は次のようになり、

$$\kappa(t') = \frac{dt}{dt'} = 1 - \mathbf{n} \cdot \vec{\beta} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + (\omega_\rho t')^2 + \psi^2 \right) \quad (3.91)$$

観測者時間 t と発光体時間 t' との関係が具体的に次式で与えられる。

$$t(t') = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2 \right) t' + \frac{\omega_\rho^2 t'^3}{6} \quad (3.92)$$

3.2.2 周波数領域の電場計算

今までの準備に基づき、偏向磁石で発生するシンクロトロン放射光の周波数領域の電場計算を展開する。これにより光子エネルギー毎の光子数の角度分布*14 (Angular Density of Spectral Flux) が計算される。偏向磁石の場合、電子の軌跡は水平方向全部を覆うので、この角度分布は水平方向 ϕ には一定で、意味が有るのは垂直方向 ψ の角度分布である。

(3.78) 式に電子の速度 (3.89) 式と発光体時間で表した観測者時間 (3.92) 式とを代入する。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_\sigma(\omega) \\ A_\pi(\omega) \end{pmatrix} &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \begin{pmatrix} \phi - \beta_x \\ \psi - \beta_y \end{pmatrix} e^{i\omega t(t')} \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \begin{pmatrix} -\omega_\rho t' \\ \psi \end{pmatrix} e^{i\omega \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2 \right) t + \frac{\omega_\rho^2 t^3}{6} \right\}} \end{aligned} \quad (3.93)$$

要はこの積分を評価すればよい訳で、これを解析的に行うために、幾つかのパラメータ化を順次行う。

まず時間変換係数を次のように展開して、

$$\begin{aligned} t(t') &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2 \right) t' + \frac{\omega_\rho^2 t'^3}{6} \\ &= \frac{\omega_\rho^2}{2} \left\{ \frac{1}{\omega_\rho^2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2 \right) t + \frac{t^3}{3} \right\} \end{aligned}$$

*14 角密度光束スペクトルと呼ぶことがある。スペクトルとは言葉元来の意味で光波長別ないし光子エネルギー別の物理量の事。光束とは光子の数密度のことだが、空間密度、角密度、時間密度、エネルギー密度等の中で何を指すかは状況による。

$$= \frac{\omega_\rho^2}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{\omega_\rho^2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2 \right)} \right)^3 \left\{ \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\omega_\rho^2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2 \right)}} t' + \frac{1}{3} \left(\frac{t'}{\sqrt{\frac{1}{\omega_\rho^2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2 \right)}} \right)^3 \right\} \quad (3.94)$$

ここに現れた同形の項は $X \equiv \gamma\psi$ を導入することにより次式の様に記述される。

$$\sqrt{\frac{1}{\omega_\rho^2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2 \right)} = \frac{\sqrt{1 + \gamma^2 \psi^2}}{\omega_\rho \gamma} = \frac{\sqrt{1 + X^2}}{\omega_\rho \gamma} \quad (3.95)$$

そして時間変換係数は次式で書かれる。

$$t(t') = \frac{1}{2\omega_\rho \gamma^3} \sqrt{1 + X^2}^3 \left\{ \frac{\omega_\rho \gamma}{\sqrt{1 + X^2}} t' + \frac{1}{3} \left(\frac{\omega_\rho \gamma}{\sqrt{1 + X^2}} t' \right)^3 \right\} \quad (3.96)$$

さらに新パラメーター τ と、

$$\frac{\omega_\rho \gamma}{\sqrt{1 + X^2}} t' \equiv \tau \quad (3.97)$$

臨界周波数 ω_c を導入する。

$$\omega_c \equiv \frac{3}{2} \omega_\rho \gamma^3 \quad (3.98)$$

これにより (3.93) 式の被積分関数の位相項は、新パラメーター η の定義を伴い、次のように書ける。

$$\omega t(t') = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_c} \sqrt{1 + X^2}^3 \right) \left\{ \tau + \frac{1}{3} \tau^3 \right\} \equiv \frac{3}{2} \eta \left\{ \tau + \frac{1}{3} \tau^3 \right\} \quad (3.99)$$

これらのパラメーター化を (3.93) 式に代入し、被積分関数の偶奇性を考慮することにより、最終的に次の形の積分を評価すればよいことになる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_\sigma(\omega) \\ A_\pi(\omega) \end{pmatrix} &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \begin{pmatrix} -\omega_\rho t' \\ \psi \end{pmatrix} e^{i\omega t(t')} \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sqrt{1+X^2}}{\omega_\rho \gamma} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{1+X^2}}{\gamma} \tau \\ \psi \end{pmatrix} e^{i\left\{ \frac{3}{2} \eta (\tau + \frac{1}{3} \tau^3) \right\}} \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \frac{\sqrt{1+X^2}}{\omega_\rho \gamma} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{1+X^2}}{\gamma} \\ \psi \end{pmatrix} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} [\cos \left\{ \frac{3}{2} \eta (\tau + \frac{1}{3} \tau^3) \right\} + i \sin \left\{ \frac{3}{2} \eta (\tau + \frac{1}{3} \tau^3) \right\}] \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \frac{\sqrt{1+X^2}}{\omega_\rho \gamma} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{1+X^2}}{\gamma} \\ \psi \end{pmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \begin{pmatrix} i\tau \sin \left\{ \frac{3}{2} \eta (\tau + \frac{1}{3} \tau^3) \right\} \\ \cos \left\{ \frac{3}{2} \eta (\tau + \frac{1}{3} \tau^3) \right\} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.100)$$

次式で定義される変形 Bessel 関数を使えば、

$$\begin{cases} K_{2/3}(\eta) \equiv \sqrt{3} \int_0^\infty \tau \sin \left\{ \frac{3}{2} \eta (\tau + \frac{1}{3} \tau^3) \right\} d\tau \\ K_{1/3}(\eta) \equiv \sqrt{3} \int_0^\infty \cos \left\{ \frac{3}{2} \eta (\tau + \frac{1}{3} \tau^3) \right\} d\tau \end{cases} \quad (3.101)$$

積分が既知の関数で表現できる。

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} A_\sigma(\omega) \\ A_\pi(\omega) \end{pmatrix} &= \frac{\omega}{2\pi} \begin{pmatrix} \sqrt{1+X^2} \\ \omega\rho\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sqrt{1+X^2} \\ \psi^\gamma \end{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} K_{2/3}(\eta) \\ K_{1/3}(\eta) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \gamma\omega \frac{2}{3\omega\rho\gamma^3} (1+X^2) \begin{pmatrix} -i \\ X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{2/3}(\eta) \\ K_{1/3}(\eta) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \gamma \frac{\omega}{\omega_c} (1+X^2) \begin{pmatrix} -i \\ X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{2/3}(\eta) \\ K_{1/3}(\eta) \end{pmatrix} \quad (3.102)
 \end{aligned}$$

斯くして、角密度光子数スペクトル (Spectral Angular Density of Flux) が計算できた。

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2\mathcal{F}_\sigma}{d^2\Omega} \\ \frac{d^2\mathcal{F}_\pi}{d^2\Omega} \end{pmatrix} = \frac{3\alpha}{4\pi^2} \gamma^2 \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{I}{e} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 (1+X^2)^2 \begin{pmatrix} K_{2/3}^2(\eta) \\ \frac{X^2}{1+X^2} K_{1/3}^2(\eta) \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

さらに (3.103) 式を垂直角度 ψ で積分した結果のみを示しておく。これは後にシンクロトロン放射で決まる電子ビームの性質を調べるときに必要となる。

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathcal{F}_\sigma}{d\phi} \\ \frac{d\mathcal{F}_\pi}{d\phi} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}\alpha}{4\pi} \gamma \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{I}{e} \frac{\omega}{\omega_c} \begin{pmatrix} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(y') dy' + K_{2/3}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \\ \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(y') dy' - K_{2/3}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

これは水平角度 ϕ 分布と言う体裁と次元を有しているが、冒頭でも触れたように ϕ に依存した量ではない。

偏向磁石放射光の特性

図 3.5 に (3.103) 式を使って計算した偏向磁石シンクロトロン放射光の波長別角度分布を示す。

横軸は電子の相対論係数を掛けた垂直方向の角度 [rad]、縦軸は光子の数密度 (Spectral Angular Flux Density) で単位は [photons/sec/mrad²/0.1% バンド幅] である。上図は σ 偏光成分、中図は π 偏光成分、下図はそれらの合計である。

各図には臨界波長 ω_c の 10 倍の波長から 10 分の 1 の波長まで計 21 本の曲線が描かれている。ただし短波長側は線幅の範囲でゼロになっている物がある。

使用した電子ビームエネルギーは 6.5GeV、偏向磁石の曲率半径は $\rho = 23.48\text{m}$ で TRISTAN-AR を想定している。また平行に進行する 1mA の電子ビームを仮定している。

上図の σ 偏光成分で見れば、常に中心 $\phi = 0$ 即ち電子ビーム運動と同じ平面上に放射光のピークがある。またピーク幅は長波長側で広く短波長側で狭い。 $\phi = 0$ で最も光子数が多い光子エネルギーは臨界波長 ω_c 付近であり、このときピーク幅は $1/\gamma$ よりやや狭い程度である。中図の π 偏光成分は σ 偏光成分と異なり、常に中心 $\phi = 0$ でゼロである。ピーク位置は長波長側で中心から遠く短波長側で近くなっている。 σ 偏光成分と同様、光子数が最大となる光子エネルギーは臨界波長 ω_c 付近であり、このとき角度分布のピーク位置は $1/\gamma$ 程度である。

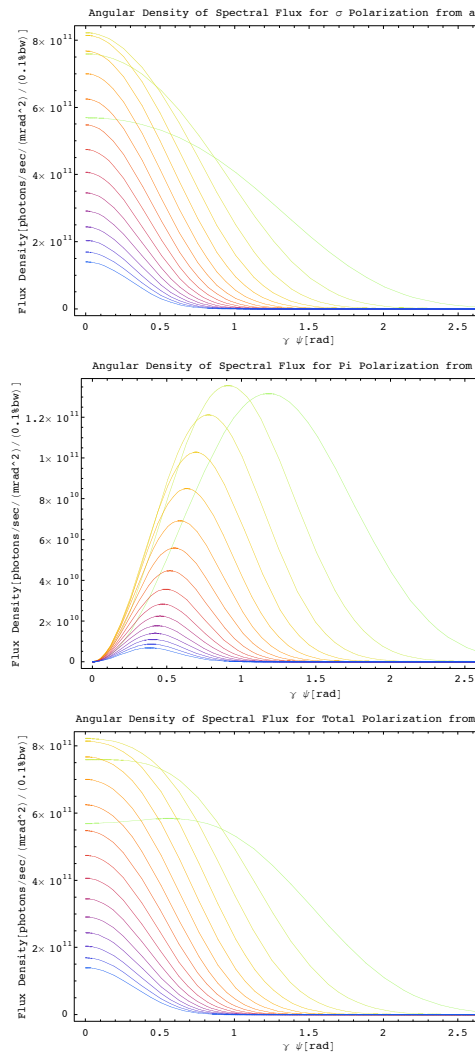


図 3.4 偏向磁石シンクロトン放射光のエネルギー別光子数角度分布。

この偏光成分に依る振る舞いの差は、電子の「見かけの運動」から定性的に解釈することができる。電子ビーム運動と同じ平面上で観測すれば、電子は水平直線運動をしている、これは放射電場が水平成分即ち σ 偏光成分のみを有する直線偏光であることを示す。水平面を離れ上ないし下から観測すれば、電子の垂直方向の運動が見える、即ち π 偏光成分が観測される。このとき電子の「見かけの運動」は円弧の一部を描くもので水平垂直の運動は 90° ずれている。これにより σ 偏光成分と π 偏光成分の位相も 90° ずれた楕円偏光ということになる。この楕円偏光の回転方向が水平面の上下で反転することも電子の「見かけの運動」を考えれば理解できよう。

当然、これらの事は数式の上でも確認することができる。(3.102) 式に示される 2 つの偏光成分の位相差を見れば理解できるであろう。

3.2.3 時間領域の電場計算

光子エネルギーを積分した形で扱う時間領域の電場計算の出発点は (3.75) 式である。これに $\phi = 0$ および電子の運動が平面内に留まると言う条件を付けると簡単化された次式になる。

$$\left(\frac{d^2 P_\sigma}{d^2 \Omega} \right) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4\pi c} \frac{I}{e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\dot{\beta}_x^2}{\kappa^5} \left(\frac{(\beta_x^2 - \kappa)^2}{(\beta_x \psi)^2} \right) dt' \quad (3.105)$$

ここに次の偏向磁石中の電子運動に対応する速度と時間変換係数を用いる。

$$\vec{\beta}(t') \approx \left(\omega_\rho t', 0, 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{(\omega_\rho t')^2}{2} \right) \quad (3.106)$$

$$\kappa(t') \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + (\omega_\rho t')^2 + \psi^2 \right) \quad (3.107)$$

これらを (3.105) 式に代入後、さらに $\xi = \omega_\rho t'$ と記述することで次式を得る。

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 P_\sigma}{d^2 \Omega} \right) &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4\pi c} \frac{I}{e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_\rho^2}{\kappa^5} \left(\frac{\left((\omega_\rho t')^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + (\omega_\rho t')^2 + \psi^2 \right) \right)^2}{((\omega_\rho t') \psi)^2} \right) dt' \\ &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega_\rho}{4\pi c} \frac{I}{e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\kappa^5} \left(\frac{\left\{ \xi^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \xi^2 + \psi^2 \right) \right\}^2}{(\xi \psi)^2} \right) d\xi \\ &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega_\rho}{4\pi c} \frac{I}{e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\kappa^5} \left(\frac{\frac{1}{4} \left(\xi^2 - \frac{1}{\gamma^2} - \psi^2 \right)^2}{(\xi \psi)^2} \right) d\xi \end{aligned} \quad (3.108)$$

これを *Mathematica* を使って ξ で積分すれば、全放射パワーの角度分布を得る。

$$\left(\frac{d^2 P_\sigma}{d^2 \Omega} \right) = \left[\frac{7}{64\pi} \frac{e^2}{\epsilon_0} \frac{eB}{m_e c} \gamma^4 \frac{I}{e} \right] \frac{1}{(1 + \gamma^2 \psi^2)^{5/2}} \left(\frac{\frac{1}{5} \gamma^2 \psi^2}{1 + \gamma^2 \psi^2} \right) \quad (3.109)$$

(3.109) 式を使って描いた全放射パワーの角度分布を図 3.4 に示す。 σ 偏光成分を1点鎖線で π 偏光成分を破線でこれらの合計を実線で示した。これは図 3.5 に示された光子エネルギー別分布の光子エネルギーでの積分に対応する。シンクロトロン放射の熱負荷を考えるとときにはこの表式が有用である。さらに垂直方向の角度 ψ で積分すれば、 $l = \rho \Delta\phi$ の弧長の軌跡を描くときに、電子は全放射エネルギーの8分の7を σ 偏光として、残り8分の1を π 偏光として放出することが判る。

$$\left(\frac{P_\sigma}{P_\pi} \right) = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma^4 I}{\rho^2 e} \left(\frac{7/8}{1/8} \right) \quad (3.110)$$

シンクロトロン放射による電子のエネルギー損失はこれから計算することができる。

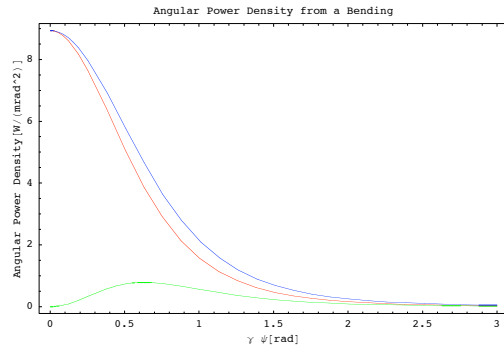


図 3.5 偏向磁石シンクロトン放射光の全放射パワー角度分布。

3.2.4 電子ビーム特性に影響するシンクロトン放射の統計的性格

既に学んだシンクロトン放射の特性を使い、電子ビームの特性に影響を与えるシンクロトン放射の統計的性格について纏めておく。ここでは偏向磁石から発生するシンクロトン放射のみを考えることにする。まず1個の電子から放出されるシンクロトン光を全て集める作業をしよう。

偏向磁石の角密度光束スペクトルを観測見込み角の垂直方向で積分して得る光束スペクトルは (3.104) 式で与えられている。

ここでは偏光成分については σ と π 両成分の合計を考える。このとき電子1個当たりの光束スペクトルを (3.111) 式に示す。

$$\frac{d\mathcal{F}_{tot}(\omega)}{d\phi} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \alpha \gamma \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(y) dy \quad (3.111)$$

ここで ω_c は電子の相対論係数 γ と曲率半径 ρ_0 で次のように決まる臨界周波数である。また α は微細構造定数である。

$$\omega_c = \frac{3}{2} \frac{c\gamma^3}{\rho_0} \quad (3.112)$$

(3.111) 式は水平角度 ϕ 分布と言う体裁を有しているが、曲率半径が一定な場合には ϕ への依存性はない。このとき加速器一周の間に1個の電子が放出する光を集めるためには、 2π を掛ければよく、電子が周回毎に放出する光子数のスペクトル密度が与えられる。

$$\mathcal{N}_{rev}(\omega) = \sqrt{3} \alpha \gamma \frac{1}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(y) dy \quad (3.113)$$

これに光子エネルギー $\hbar\omega$ を掛けることで、パワースペクトル密度を得る。ここでは古典電磁場の本質的でない Plank 定数は微細構造定数 α と共に消去される。

$$P_{rev}(\omega) = \sqrt{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c} \gamma \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(y) dy \equiv \frac{2}{9} \frac{e^2}{\epsilon_0 c} \gamma S\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (3.114)$$

ここでは次に定義される関数を導入した。

$$S(\xi) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \xi \int_{\xi}^{\infty} K_{5/3}(y) dy \quad (3.115)$$

この関数は次のように正規化されている*15。

$$1 = \int_0^{\infty} S(\xi) d\xi \quad (3.118)$$

(3.114) 式を周波数について積分すれば、電子がリング加速器一周の間に失う放射エネルギーが計算される。

$$U_0 \equiv \int_0^{\infty} P_{rev}(\omega) d\omega = \frac{e^2}{3\varepsilon_0} \frac{\gamma^4}{\rho_0} \quad (3.119)$$

またこの間に放出する光子の総数は、(3.113) 式を周波数で積分して次式となる。

$$N_{rev} = \int_0^{\infty} \mathcal{N}_{rev}(\omega) d\omega = \frac{5\sqrt{3}\pi}{3} \alpha \gamma \quad (3.120)$$

従って、放出される光子の平均エネルギーは次のようになる。

$$\langle u \rangle = \frac{U_0}{N_{rev}} = \frac{4}{5\sqrt{3}} \frac{\hbar c \gamma^3}{\rho_0} = \frac{8}{15\sqrt{3}} \hbar \omega_c \quad (3.121)$$

また放出される光子の2乗平均エネルギーは次のようになる。

$$\begin{aligned} \langle u^2 \rangle &= \frac{1}{N_{rev}} \int_0^{\infty} (\hbar\omega)^2 \mathcal{N}_{rev}(\omega) d\omega \\ &= \frac{3}{5\pi} (\hbar\omega_c)^2 \int_0^{\infty} y^2 \left(\int_y^{\infty} K_{5/3}(x) dx \right) dy \\ &= \frac{3}{5\pi} (\hbar\omega_c)^2 \frac{55\pi}{81} = \frac{11}{27} (\hbar\omega_c)^2 \end{aligned} \quad (3.122)$$

電磁場計算の限界

図 3.6 にパワースペクトル密度を表す関数 $S(\xi)$ の振る舞いを描いておく。実は、これまでの電磁場計算方法の限界が、この図の左右両端に潜んでいる。

臨界波長は電子エネルギーに3乗で依存するため、非常に高いエネルギーの電子の場合、自分自身より高いエネルギーの光子放出があり得る事になってしまう。あるいは図 3.6 で高エネルギー側に延びる裾野は電子自身のエネルギーを越えている。これは勿論非物理的

*15 以下に展開される一連の Bessel 関数の積分は、部分積分から導かれる次の関係と、

$$\int_0^{\infty} y^m \left(\int_y^{\infty} K_n(x) dx \right) dy = \frac{1}{m+1} \int_0^{\infty} y^{m+1} K_n(y) dy \quad (3.116)$$

Bessel 関数の次の性質を使って計算される。

$$\int_0^{\infty} K_n(y) y^m dy = 2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m+1+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+1-n}{2}\right) \quad (3.117)$$

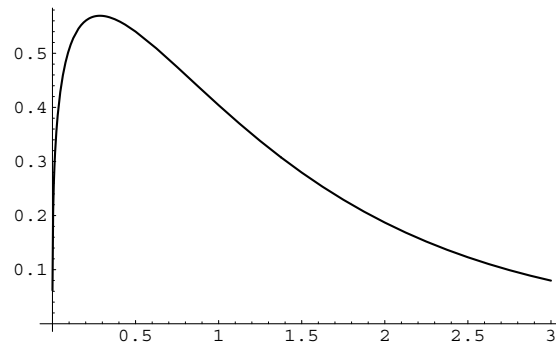


図 3.6 関数 $S(\xi)$ の振る舞い。

状況であり古典電磁気学の限界を示す。このような状況では量子電気力学を適用して考えなければならない。例えば、リニアークライダのビーム衝突部ではこの取り扱いを必要としている。

低エネルギー側にも限界が有る、即ち干渉性放射である。光の波長が電子ビームの拡がり程度に長くなると、個々の電子からの放射と言う扱いができなくなり、電子ビーム全体としての放射として考える必要がある。この実例として、自由電子レーザー、電磁場によるビーム不安定現象、高周波源に使われるクライストロンの原理などがある。

3.3 アンジュレータのシンクロトロン放射

近年稼働を開始した SPring-8、APS、ALS、ESRF、ELLETRA 等いわゆる第3世代と言われるシンクロトロン放射光源の特徴は低エミッタンスビームと長いアンジュレータ磁石の組み合わせである。この組み合わせに基づいて、輝度と呼ばれる放射光源評価の究極パラメータを高くする事を追求している。輝度とは6次元位相空間における光子数密度のことであり、アンジュレータではこれを高くするため、1個の電子から出てくる光の干渉を実現している。アンジュレータの全長 L に渡って出てくる光が観測者に途切れ無く見え続けることがこの干渉性の所以である。偏向磁石では1個の電子から出てくる放射光は弧長 $l \approx \rho/\gamma$ に相当する間しか観測されない、ここから大きな違いが生まれてくる。

ここでは平面型アンジュレータから出てくる放射光ビームの特性を調べる。最近の典型的平面型アンジュレータ像として、非常に大雑把に言って、次のものを念頭に置いて欲しい。周期長は数 cm、周期数は 100 程度、全長は数 m の永久磁石列で最大強度 10 分の数テスラの垂直磁場を発生する。そしてギャップ間隔は最小値数 cm で、最大磁場を変えられるように可変である。

3.3.1 電子軌跡と「見かけの運動」

周期長 λ_u の平面型アンジュレータの近似磁場、

$$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z) = (0, -B_0 \sin(2\pi z/\lambda_u), 0) \quad (3.123)$$

これは Maxwell 方程式を満たしていないが、アンジュレータの中心軸に近い限りよい近似である。周期数 N とすると磁場が存在する領域は $0 \leq z \leq N\lambda_u$ である。

ローレンツ力による運動方程式を成分表示すれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} m_e \gamma \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= m_e \gamma (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = e (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \times (0, B_y, 0) \\ &= e B_0 (\sin(2\pi z/\lambda_u) \dot{z}, 0, -\sin(2\pi z/\lambda_u) \dot{x}) \end{aligned} \quad (3.124)$$

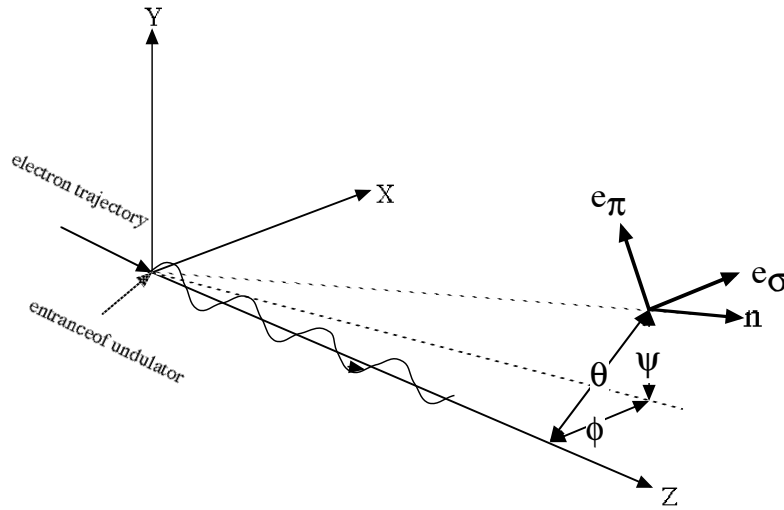


図 3.7 アンジュレータ放射の座標系

ここでアンジュレータパラメータ K を導入する。ここでは運動粒子の電荷 e に正負があることを考慮して、次式の定義に従いアンジュレータパラメータにも正負があることにしておく*16。

$$K \equiv \frac{e B_0 \lambda_u}{2\pi m_e c} \approx 93.37 B_0 [T] \lambda_u [m] \quad (3.125)$$

運動方程式は K を使って次式に書ける。

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{K}{\gamma} \frac{2\pi c}{\lambda_u} \sin(2\pi z/\lambda_u) \dot{z} \\ \ddot{z} = -\frac{K}{\gamma} \frac{2\pi c}{\lambda_u} \sin(2\pi z/\lambda_u) \dot{x} \end{cases} \quad (3.126)$$

*16 一般には K は正値として扱われているので要注意。ここでは電子および陽電子を形式的に統一した運動方程式の中で K を使いたかったのでこうした。 K の正負は B_0 の正負にも依るので、アンジュレータ内の電子軌道の位相を気にしないなら、符号の調整を B_0 にまかせ常に $K > 0$ ともできる。

この第1式の右辺は次のように書き換えることができる。

$$\ddot{x} = \frac{K}{\gamma} \frac{2\pi c}{\lambda_u} \frac{d}{dt'} \left[-\frac{\lambda_u}{2\pi} \cos(2\pi z/\lambda_u) \right] = -c \frac{K}{\gamma} \frac{d}{dt'} [\cos(2\pi z/\lambda_u)] \quad (3.127)$$

すると両辺が簡単に t' で積分されて x 方向の速度を得る。

$$\dot{x} = -\frac{cK}{\gamma} \cos(2\pi z/\lambda_u) \equiv c\beta_x \quad (3.128)$$

一方 (3.126) 第1式に \dot{x} そして第2式に \dot{z} を掛けて両式の和を取ればサイン関数が消去された次式を得る。

$$\dot{x}\dot{x} + \dot{z}\dot{z} = 0 \quad (3.129)$$

これを積分することで、磁場中での速度不変が示される。

$$\dot{x}^2 + \dot{z}^2 = \text{const.} \equiv (c\beta)^2 = c^2 (\beta_x^2 + \beta_z^2) = c^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \quad (3.130)$$

そこで β_z が次式で表される。近似の成立条件は超相対論的粒子 $1 \ll \gamma$ かつ $K \ll \gamma$ である。

$$\beta_z = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} - \beta_x^2 \right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \beta_x^2 \right) \quad (3.131)$$

ここで β_x として (3.128) 式を代入すると、 β_z を次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \beta_z &= 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\gamma^2} + \left\{ -\frac{K}{\gamma} \cos(2\pi z/\lambda_u) \right\}^2 \right] \\ &= 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \left[1 + \frac{1}{2} K^2 \{ 1 + \cos(4\pi z/\lambda_u) \} \right] \end{aligned} \quad (3.132)$$

結局、電子の速度ベクトルを次式に得た。

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_x \\ 0 \\ \beta_z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -\frac{K}{\gamma} \cos(2\pi z/\lambda_u) \\ 0 \\ 1 - \frac{1+K^2/2}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{4\gamma^2} \cos(4\pi z/\lambda_u) \end{pmatrix} \quad (3.133)$$

$z \approx \beta c t'$ という近似条件^{*17}を使って、積分ができ電子軌道が求められる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \mathbf{r}(t') &= \int_0^{t'} \vec{\beta} dt' \approx \int_0^{t'} \begin{pmatrix} -\frac{K}{\gamma} \cos(2\pi c t'/\lambda_u) \\ 0 \\ 1 - \frac{1+K^2/2}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{4\gamma^2} \cos(4\pi c t'/\lambda_u) \end{pmatrix} dt' \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{K}{\gamma} \frac{\lambda_u}{2\pi c} \sin(2\pi c t'/\lambda_u) \\ 0 \\ \left(1 - \frac{1+K^2/2}{2\gamma^2} \right) t' - \frac{K^2}{8\gamma^2} \frac{\lambda_u}{2\pi c} \sin(4\pi c t'/\lambda_u) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.134)$$

ここで積分定数は図 3.7 に示された座標の原点に電子が居る時 $t' = 0$ となるように決めた。

^{*17} この近似条件は少し気かりであるが、解析的取り扱い上は避け難く思われる。

アンジュレータの周期に対応する周波数を定義する。

$$\omega_u \equiv \frac{2\pi c}{\lambda_u} \quad (3.135)$$

これにより電子軌道は次式で表せる。

$$\frac{1}{c} \mathbf{r}(t') = \begin{pmatrix} -\frac{K}{\gamma} \frac{1}{\omega_u} \sin(\omega_u t') \\ 0 \\ \left(1 - \frac{1+K^2/2}{2\gamma^2}\right) t' - \frac{K^2}{8\gamma^2} \frac{1}{\omega_u} \sin(2\omega_u t') \end{pmatrix} \quad (3.136)$$

この座標系では発光体から観測者を向いた単位ベクトルは次式である。

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos \psi \sin \phi \\ \sin \psi \\ \cos \psi \cos \phi \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \\ 1 - \frac{1}{2}(\phi^2 + \psi^2) \end{pmatrix} \quad (3.137)$$

(3.136) 式と (3.137) 式を使えば、発光体時間と観測者時間の関係が次式に書ける。

$$\begin{aligned} t(t') &= t' - \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t') \\ &= t' - \left(-\frac{K}{\gamma} \frac{1}{\omega_u} \sin(\omega_u t') \right) \phi \\ &\quad - \left\{ \left(1 - \frac{1+K^2/2}{2\gamma^2}\right) t' - \frac{K^2}{8\gamma^2} \frac{1}{\omega_u} \sin(2\omega_u t') \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(\phi^2 + \psi^2) \right\} \end{aligned} \quad (3.138)$$

ここで、観測見込み角が小さく電子が超相対論的という条件を考慮して2次までの近似を作ろう。

$$\phi, \psi, 1/\gamma \ll 1 \quad (3.139)$$

観測者時間が次式の形で発光体時間の関数として書ける。

$$t(t') \approx t' \left\{ \frac{1+K^2/2+\gamma^2(\phi^2+\psi^2)}{2\gamma^2} \right\} + \frac{K^2}{8\omega_u\gamma^2} \sin(2\omega_u t') + \frac{K\phi}{\omega_u\gamma} \sin(\omega_u t') \quad (3.140)$$

3.3.2 周波数領域の電場計算

周波数表示の電場を求めるためには (3.78) 式に、求めた電子速度 (3.133) 式と発光体時間で表した観測者時間 (3.140) 式を代入してやればよい。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_\sigma(\omega) \\ A_\pi(\omega) \end{pmatrix} &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \begin{pmatrix} \phi - \beta_x \\ \psi - \beta_y \end{pmatrix} e^{i\omega t(t')} \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \begin{pmatrix} \phi + \frac{K}{\gamma} \cos(2\pi ct'/\lambda_u) \\ \psi \end{pmatrix} \times \\ &\quad e^{i\omega \left[t' \left\{ \frac{1+K^2/2+\gamma^2(\phi^2+\psi^2)}{2\gamma^2} \right\} + \frac{K^2}{8\omega_u\gamma^2} \sin(2\omega_u t') + \frac{K\phi}{\omega_u\gamma} \sin(\omega_u t') \right]} \end{aligned} \quad (3.141)$$

ここで指数関数の肩を簡潔に表現するため、(3.135) 式および下の3つの式を使ったパラメータの書き換えを行う。

$$\xi \equiv \omega_u t' \quad (3.142)$$

$$\theta^2 \equiv \phi^2 + \psi^2 \quad (3.143)$$

$$\omega_1(\theta) \equiv \omega_u \frac{2\gamma^2}{1 + K^2/2 + \gamma^2\theta^2} \quad (3.144)$$

これらのパラメータ化の結果、まず次式を得る。

$$\begin{pmatrix} A_\sigma(\omega) \\ A_\pi(\omega) \end{pmatrix} = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\omega_u} \begin{pmatrix} \phi + \frac{K}{\gamma} \cos \xi \\ \psi \end{pmatrix} e^{i\omega \left\{ \xi \frac{1}{\omega_1(\theta)} + \frac{K^2}{8\omega_u \gamma^2} \sin(2\xi) + \frac{K\phi}{\omega_u \gamma} \sin(\xi) \right\}} \quad (3.145)$$

さらに (3.144) 式により ω_u は次に書けるので、

$$\frac{1}{\omega_u} \equiv \frac{1}{\omega_1(0)} \frac{2\gamma^2}{1 + K^2/2} \quad (3.146)$$

下の式を得る。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_\sigma(\omega) \\ A_\pi(\omega) \end{pmatrix} &= \frac{\omega}{\omega_1(0)} \frac{\gamma K}{(1 + K^2/2)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \begin{pmatrix} \gamma\phi/K + \cos \xi \\ \gamma\psi/K \end{pmatrix} \times \\ &e^{i \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \xi + \frac{1}{4} \frac{\omega}{\omega_1(0)} \frac{K^2}{1 + K^2/2} \sin(2\xi) + 2 \frac{\omega}{\omega_1(0)} \frac{\gamma K \phi}{1 + K^2/2} \sin(\xi) \right\}} \end{aligned} \quad (3.147)$$

ここで次に定義する p と q を導入する。

$$p \equiv 2 \frac{\omega}{\omega_1(0)} \frac{\phi \gamma K}{1 + K^2/2} \quad (3.148)$$

$$q \equiv \frac{1}{4} \frac{\omega}{\omega_1(0)} \frac{K^2}{1 + K^2/2} \quad (3.149)$$

これで指数関数の肩の記述が簡略化される。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_\sigma(\omega) \\ A_\pi(\omega) \end{pmatrix} &= \\ &\frac{\omega}{\omega_1(0)} \frac{\gamma K}{(1 + K^2/2)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \begin{pmatrix} \gamma\phi/K + \cos \xi \\ \gamma\psi/K \end{pmatrix} e^{i \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \xi + q \sin(2\xi) + p \sin(\xi) \right\}} \end{aligned} \quad (3.150)$$

ここで積分変数 ξ の範囲を考えてみよう。

$$\xi = \omega_u t' = \frac{2\pi c}{\lambda_u} t' \quad (3.151)$$

被積分関数はアンジュレータの中でだけゼロでない事を考慮して、発光体時間 t' の原点をアンジュレータの中心に移す。

$$-\frac{N\lambda_u}{2c} \leq t' \leq \frac{N\lambda_u}{2c} \quad (3.152)$$

そこで ξ の積分範囲は次のようになる。

$$-\pi N \leq \xi \leq \pi N \quad (3.153)$$

この積分はアンジュレータの周期長 λ_u に対応する ξ の範囲 $\pm\pi$ の積分と周期数 N 分の総和とに分けることができる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_\sigma(\omega) \\ A_\pi(\omega) \end{pmatrix} &= \frac{\omega}{\omega_1(0)} \frac{\gamma K}{(1+K^2/2)} \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i[2\pi k \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \right\} - \pi(N-1) \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \right\}]} \times \\ &\int_{-\pi}^{\pi} d\xi \begin{pmatrix} \gamma\phi/K + \cos\xi \\ \gamma\psi/K \end{pmatrix} e^{i\left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \xi + q \sin(2\xi) + p \sin(\xi) \right\}} \end{aligned} \quad (3.154)$$

総和については幾何級数の和を取ることで計算される。

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{N-1} e^{i[2\pi k \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \right\} - \pi(N-1) \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \right\}]} \\ &= e^{i[-\pi(N-1) \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \right\}]} \frac{1 - e^{i2\pi N \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \right\}}}{1 - e^{i2\pi \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \right\}}} \\ &= \frac{e^{i[-\pi N \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \right\}]} e^{i\pi \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \right\}}}{e^{i[-\pi \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \right\}]} e^{i\pi \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \right\}}} \frac{1 - e^{i2\pi N \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \right\}}}{1 - e^{i2\pi \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \right\}}} \\ &= \frac{e^{-i\pi N \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \right\}} - e^{i\pi N \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \right\}}}{e^{-i\pi \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \right\}} - e^{i\pi \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \right\}}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{N\pi\omega}{\omega_1(\theta)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_1(\theta)}\right)} \end{aligned} \quad (3.155)$$

よって周波数表示の電場が次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_\sigma(\omega) \\ A_\pi(\omega) \end{pmatrix} &= \\ &\frac{\omega}{\omega_1(0)} \frac{\gamma K}{(1+K^2/2)} \frac{\sin\left(\frac{N\pi\omega}{\omega_1(\theta)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_1(\theta)}\right)} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \begin{pmatrix} \gamma\phi/K + \cos\xi \\ \gamma\psi/K \end{pmatrix} e^{i\left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \xi + q \sin(2\xi) + p \sin(\xi) \right\}} \end{aligned} \quad (3.156)$$

ここで2つの関数を新たに定義する、一つは (3.156) 式の総和の部分を表す。

$$S_N\left(\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right) \equiv \left\{ \frac{\sin\left(\frac{N\pi\omega}{\omega_1(\theta)}\right)}{N \sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_1(\theta)}\right)} \right\}^2 \quad (3.157)$$

もう一つは1周期内の積分を表す。

$$\begin{pmatrix} B_\sigma(\omega, \phi, \psi) \\ B_\pi(\omega, \phi, \psi) \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \begin{pmatrix} \gamma\phi/K + \cos\xi \\ \gamma\psi/K \end{pmatrix} e^{i\left\{ \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \xi + q \sin(2\xi) + p \sin(\xi) \right\}} \quad (3.158)$$

これを使うと周波数表示の電場は次のように書ける*18。

$$\begin{pmatrix} A_\sigma(\omega) \\ A_\pi(\omega) \end{pmatrix} = \frac{\omega}{\omega_1(0)} \frac{\gamma K}{(1+K^2/2)} N \sqrt{S_N\left(\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right)} \begin{pmatrix} B_\sigma(\omega, \phi, \psi) \\ B_\pi(\omega, \phi, \psi) \end{pmatrix} \quad (3.159)$$

上式を (3.78) 式に代入することで角密度光子数スペクトルを得る。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{d^2 \mathcal{F}_\sigma}{d^2 \Omega} \\ \frac{d^2 \mathcal{F}_\pi}{d^2 \Omega} \end{pmatrix} &= \alpha \frac{\Delta \omega}{\omega} \frac{I}{e} \begin{pmatrix} |A_\sigma(\omega)|^2 \\ |A_\pi(\omega)|^2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha \frac{\Delta \omega}{\omega} \frac{I}{e} \left[\frac{\omega}{\omega_1(0)} \frac{\gamma K}{(1+K^2/2)} N \right]^2 S_N\left(\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right) \begin{pmatrix} |B_\sigma(\omega, \phi, \psi)|^2 \\ |B_\pi(\omega, \phi, \psi)|^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.160)$$

3.3.3 平面型アンジュレータ放射の特性

角密度光子数スペクトルを構成する2つの関数のうち、1周期内の積分を表わす $B_{\sigma,\pi}$ は角度についても周波数についても比較的おとなしい振る舞いをする。一方周期数分の総和を表わす関数 S_N は角度、周波数ともに激しい依存性が有る。すなわち、平面型アンジュレータ放射の角密度光子数スペクトルに特徴的な角度や周波数依存性は関数 S_N に由来する。

スペクトル特性

S_N 関数の周波数特性を見ておこう。観測者位置つまり角度 ϕ と ψ が与えられ θ が決まった時、スペクトルがピークになる周波数 ω は、 S_N を定義した (3.157) 式の分母がゼロに近いとき、即ち次式を満たす所にある。

$$\omega = n\omega_1(\theta) \equiv \omega_n \quad (3.161)$$

ここで n は任意の整数である。 n が1の場合は基本波と呼ばれ、1より大きいときには各々 n 倍の高調波あるいはハーモニクスと呼んでいる。このスペクトルがピークになる周波数を波長で表わせば、

$$\lambda_n(\theta) = \frac{1}{n} \lambda_u \frac{1+K^2/2+\gamma^2\theta^2}{2\gamma^2} \quad (3.162)$$

スペクトルピークの波長は、およそアンジュレータの周期長を電子ビームの相対論係数の2乗で割ったものの $2/n$ 分の1であることが解る。またアンジュレータパラメタの K 値や、観測見込み角度 θ が大きくなるに連れ長波長側にシフトすることも示されている。

スペクトル線幅を調べるために、スペクトルピーク付近で、次のように書いてみる。

$$\omega = n\omega_1(\theta) + \Delta\omega \quad (3.163)$$

*18 このように書くと (3.159) 式は (3.156) 式を符号については再現できないが、(3.160) 式で絶対値のみ意味を持つように使う限り問題はない。

ここで $\Delta\omega \ll 1$ とする。これを S_N 関数の定義式に代入することで、スペクトルピーク付近における次の近似式を得る。

$$S_N\left(\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right) = S_N\left(\frac{n\omega_1(\theta) + \Delta\omega}{\omega_1(\theta)}\right) \approx \left\{ \frac{\sin\left(N\pi\frac{\Delta\omega}{\omega_1(\theta)}\right)}{N\pi\frac{\Delta\omega}{\omega_1(\theta)}} \right\}^2 \quad (3.164)$$

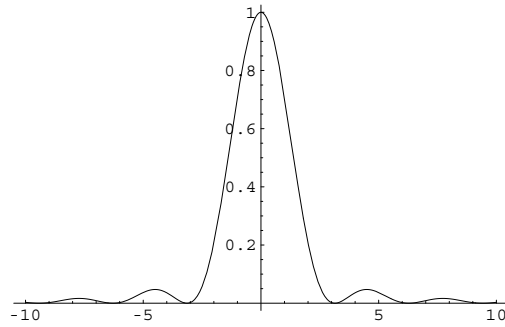


図 3.8 スペクトルピーク周辺の S_N 関数の振る舞い。

この式はスペクトル拡がりアンジュレータの周期数に反比例していることを示している。図 3.8 にこのスペクトルピーク付近での S_N 関数の近似形を描いて見た。横軸は $N\pi\frac{\Delta\omega}{\omega_1(\theta)}$ を表し、縦軸はこれを引き数とする S_N 関数の (3.164) 式による近似値である。これによりスペクトル線幅の半値全幅 (FWHM) は次のように評価される。

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_n} \approx \frac{2.8}{\pi n N} \approx \frac{0.9}{n N} \quad (3.165)$$

このようにスペクトル幅がアンジュレータ周期数に反比例するということは、1 個の電子がアンジュレータを通過する間に放射する光は、アンジュレータ周期数分^{*19}の時間干渉性を有する事を物語っている。つまりアンジュレータ磁極相互間からの放射には干渉性が有るともいえる。電磁場の Feynmann 表現から言えば、電子の周期運動を時間的に連続して観測した時、その Fourier 変換で与えられるスペクトル線幅は、当然、周期数に反比例していると解釈することもできる。

放射の角分布

観測見込み角 θ に依存した放射光の特性を調べるために、一定周波数における S_N 関数を角度の関数として調べる必要がある。周波数を次式で表されるようにスペクトルのピーク近くに選んで様子を見てみよう。

$$\frac{\omega}{\omega_1(0)} = n + \Delta\nu \quad (3.166)$$

^{*19} 自由電子レーザーが発振すると、同じアンジュレータから出てくる光でも、発振前に比べてスペクトル線幅が非常に狭くなる。これは電子相互間に放射電磁場を媒介とした運動の相関が起き、異なる電子から放射された光の間にも時間干渉性が生じるからである。先行する電子の運動状態が後から来る電子に引き継がれるので、実効的にアンジュレータの周期数が増加した、とも解釈できる。

$\omega_1(\theta)$ の定義 (3.144) 式を次のように観測角度 θ が目立つように書き換える。

$$\begin{aligned}\omega_1(\theta) &= \frac{2\gamma^2}{1 + K^2/2 + \gamma^2\theta^2}\omega_u \\ &= \frac{2\gamma^2}{1 + K^2/2}\omega_u \frac{1 + K^2/2}{1 + K^2/2 + \gamma^2\theta^2} \\ &= \omega_1(0) \frac{1 + K^2/2}{1 + K^2/2 + \gamma^2\theta^2} \\ &\equiv \omega_1(0) \frac{1}{1 + \gamma^{*2}\theta^2}\end{aligned}\quad (3.167)$$

ここで現われた γ^* は、粒子のアンジュレータ内平均進行速度に対応する相対論係数と言う物理的意味を持つ量で次式で定義される。

$$\gamma^* = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + K^2/2}}\quad (3.168)$$

これらに依り、 S_N 関数の引き数が次のように書かれる。

$$\frac{\omega}{\omega_1(\theta)} = \frac{\omega_1(0)(n + \Delta\nu)}{\omega_1(\theta)} = (n + \Delta\nu)(1 + \gamma^{*2}\theta^2)\quad (3.169)$$

この形で S_N に代入し、 $\Delta\nu \ll 1$ および $\gamma^*\theta \ll 1$ として近似を施す。

$$S_N\left(\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right) = \left[\frac{\sin\{N\pi(n + \Delta\nu)(1 + \gamma^{*2}\theta^2)\}}{N\sin\{\pi(n + \Delta\nu)(1 + \gamma^{*2}\theta^2)\}}\right]^2 \approx \left[\frac{\sin\{N\pi(\Delta\nu + n\gamma^{*2}\theta^2)\}}{N\pi(\Delta\nu + n\gamma^{*2}\theta^2)}\right]^2\quad (3.170)$$

この近似式の分母を見れば、 $\Delta\nu \geq 0$ の時は放射の角分布は前方にピークをもつこと、また $\Delta\nu < 0$ の時の角分布は前方に窪みを持つことが理解される。前方にピークをもつ角度分布の時はこれをガウス関数で近似することが可能である。

$$S_N \sim \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\sigma_{r'}^2}\right)\quad (3.171)$$

ここで $\Delta\nu = 0$ の時、光の角度発散の標準偏差 $\sigma_{r'}$ は近似の S_N 関数 (3.170) 式を使って次式で評価される。

$$\sigma_{r'}^2 \equiv \frac{\int_0^{\frac{1}{\gamma^*}} \theta^2 S_N d\theta}{\int_0^{\frac{1}{\gamma^*}} S_N d\theta} \approx \frac{\int_0^{\frac{1}{\gamma^*}} \theta^2 \left[\frac{\sin\{N\pi(n\gamma^{*2}\theta^2)\}}{N\pi(n\gamma^{*2}\theta^2)}\right]^2 d\theta}{\int_0^{\frac{1}{\gamma^*}} \left[\frac{\sin\{N\pi(n\gamma^{*2}\theta^2)\}}{N\pi(n\gamma^{*2}\theta^2)}\right]^2 d\theta}\quad (3.172)$$

ここではセントラルコーン全体での積分を行おうとしている。この積分の実行は、積分変数を $\varsigma = \gamma^*\theta$ と変更することで、サイン型およびコサイン型の Fresnel 積分^{*20}を使い

^{*20} Fresnel 積分の定義。

$$S(z) \equiv \int_0^z \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$$

次のように行われ、放射の角度分散が与えられる。

$$\sigma_{r'}^2 = \frac{\int_0^1 \left(\frac{\zeta}{\gamma^*}\right)^2 \left[\frac{\sin(N\pi n\zeta^2)}{N\pi n\zeta^2}\right]^2 d\zeta}{\int_0^1 \left[\frac{\sin(N\pi n\zeta^2)}{N\pi n\zeta^2}\right]^2 d\zeta} = \frac{3}{4\gamma^{*2}Nn\pi} \frac{S(2\sqrt{Nn})}{C(2\sqrt{Nn})} \approx \frac{1}{4\gamma^{*2}Nn} \quad (3.174)$$

このようにして放射光の角度拡がりの標準偏差は次の式で与えられた。

$$\sigma_{r'} \approx \frac{1}{2\gamma^*\sqrt{Nn}} = \frac{1}{2\gamma} \sqrt{\frac{1+K^2/2}{Nn}} \quad (3.175)$$

これを光の波長と、

$$\lambda_n = \frac{1+K^2/2}{2\gamma^2 n} \lambda_u \quad (3.176)$$

アンジュレータの全長 L を使って、次のように書くこともできる。

$$\sigma_{r'} = \sqrt{\frac{\lambda_n}{2L}} \quad (3.177)$$

角度効果によるスペクトル線幅増大

先に求めた放射光スペクトルの線幅は、定められた観測角度で受光面の角度拡がりゼロを仮定したものであった。実際に放射光を使用する場合はある有限の立体角で光を受ける訳で、(3.167) 式に示されたスペクトルピーク位置の観測見込み角依存性のためにスペクトル線幅の増大が起こる。受光角口径が $\Delta\theta$ の時生じるスペクトル幅の増加 $\Delta\omega$ は、(3.167) 式からおおよそ次のように見積もることができる。

$$\left. \frac{\Delta\omega}{\omega} \right|_{\Delta\theta} \sim \gamma^{*2} \Delta\theta^2 \quad (3.178)$$

正面放射場のハーモニック成分

平行電子ビームによるアンジュレータ光の正面における n 倍ハーモニクス成分を調べる。

$$\omega_n = n\omega_1(0) \quad (3.179)$$

周波数表示による放射電場 (3.158) 式を正面放射 $\phi = 0, \psi = 0$ について評価して見る。 π 偏光成分は正面ではゼロなので σ 偏光成分だけ考える。

$$B_\sigma(\omega_n, 0, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \cos \xi e^{i\{n\xi + q \sin(2\xi)\}} \quad (3.180)$$

$$C(z) \equiv \int_0^z \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \quad (3.173)$$

ここで

$$q = \frac{n}{4} \left(\frac{K^2}{1 + K^2/2} \right) \quad (3.181)$$

この積分評価の計算過程は示さないが、次式で定義される Bessel 関数を使うことで、

$$J_k(q) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(k\theta - q \sin \theta) d\theta \quad (3.182)$$

積分が Bessel 関数で表現できる。

n が奇数次ハーモニクスの時

$$B_\sigma(\omega_n, 0, 0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left\{ J_{\frac{n-1}{2}}(q) - J_{\frac{n+1}{2}}(q) \right\} \quad (3.183)$$

n が偶数次ハーモニクスの時

$$B_\sigma(\omega_n, 0, 0) = 0 \quad (3.184)$$

と評価される。

電子ビーム角度発散の影響

さて今までは電子については平行ビーム、即ちゼロエミッタンスビームを前提にしていた。電子ビームに角度発散が有るときアンジュレータ放射光に生じる影響を検討しよう。

電子ビームの角度拡がりの標準偏差が水平垂直共に充分小さいとする、すなわち $\sigma_{x'} \ll 1/\gamma$ かつ $\sigma_{y'} \ll 1/\gamma$ である。

■等価仮定 ここで、「電子軌跡がアンジュレータに対して θ 傾いている時にアンジュレータの正面から観測した光の性質は、電子軌跡がアンジュレータに対し真直ぐだがアンジュレータの正面から θ 外れて観測した光の性質と等しい。」という等価仮定を採用する。

この仮定を使えば、電子ビーム角度発散の効果を含んだ角密度光子数スペクトルは次のように表わすことができる。

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{F}}{d^2 \Omega} \right|_0 = \int \frac{d^2 \mathcal{F}^0(\phi, \psi)}{d^2 \Omega} g(\phi, \psi) d\phi d\psi \quad (3.185)$$

ここで

$$\frac{d^2 \mathcal{F}^0(\phi, \psi)}{d^2 \Omega} \quad (3.186)$$

は平行電子ビームの角密度光子数スペクトルである。また、 g は電子ビームの角度分布関数で、次式で与えられる*21。

$$g(\phi, \psi) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x'}\sigma_{y'}} \exp \left[-\frac{\phi^2}{2\sigma_{x'}^2} - \frac{\psi^2}{2\sigma_{y'}^2} \right] \quad (3.188)$$

*21 ここに現れる電子の角度分布の標準偏差 $\sigma_{x'}$ および $\sigma_{y'}$ は、電子ビームのエミッタンス $\varepsilon_{x,y}$ と発光位置における Twiss パラメータ $\gamma_{x,y}$ を使って次のように書ける。

$$\sigma_{x'} = \sqrt{\varepsilon_x \gamma_x}, \quad \sigma_{y'} = \sqrt{\varepsilon_y \gamma_y} \quad (3.187)$$

奇数ハーモニクスの場合、角密度光子数スペクトル $d^2\mathcal{F}^0/d^2\Omega$ は、 S_N 関数に支配され、近似的にガウス型である。

$$S_N\left(\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right) \approx \exp\left[-\frac{\phi^2 + \psi^2}{2\sigma_{r'}^2}\right] \quad (3.189)$$

この平行電子ビーム光の角度分布関数と (3.188) 式の電子ビームの角度分布関数とを畳み込み計算することで、有限な角度拡がりのある電子ビームから発生する放射光ビームの角度分布関数を計算することができる。今の場合、分布関数同士ガウス関数なので、畳み込みの結果もまたガウス関数となる。畳み込みの結果として得る、放射光ビーム角度の標準偏差 $\sigma_{Tx'}$ は、電子ビーム角度の標準偏差 $\sigma_{x'}$ と平行電子ビームから出る光の角度の標準偏差 $\sigma_{r'}$ を使い次の関係で与えられる。

$$\sigma_{Tx'} = \sqrt{\sigma_{r'}^2 + \sigma_{x'}^2} \quad (3.190)$$

偶数ハーモニクスの場合、ガウス型からほど遠いため、積分 $B_{\sigma,\pi}$ を評価する必要があり、ここでは取り扱わない。

第 4 章

シンクロトロン放射から決まる電子ビーム特性

第 3 章ではシンクロトロン放射について主に光を使う側の立場から調べた。この章では、シンクロトロン放射をすることで荷電粒子に生じる影響を調べる。

電子貯蔵リングにおける電子ビームの特性はこのシンクロトロン放射の影響によって支配されている。

またハドロン貯蔵型加速器においても、CERN の LHC (Large Hadron Collider) 加速器のような、非常に高エネルギー領域を目指す場合にはシンクロトロン放射の影響を無視できなくなる。

4.1 電子ビーム特性に影響するシンクロトロン放射

電子ビームの特性に影響を与えるものを纏めておく。ここでは偏向磁石から発生するシンクロトロン放射のみを考えることにする。

3.2.4 で学んだ 1 個の電子が放射するシンクロトロン光の統計的性格について再び纏めておく。

次に放射エネルギー量の電子エネルギー偏差への線形依存率を求める。

4.1.1 シンクロトロン放射の統計的性格

3.2.4 で得た結果を以下に再掲する。^{*1}

^{*1} 念のため、臨界周波数 ω_c と微細構造定数 α も以下に記しておく。

$$\omega_c = \frac{3}{2} \frac{c\gamma^3}{\rho} \quad (4.1)$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \quad (4.2)$$

電子がリング加速器一周の間に失う放射エネルギーは、

$$U_0 \equiv \int_0^\infty P_{rev}(\omega) d\omega = \frac{e^2}{3\epsilon_0} \frac{\gamma^4}{\rho} \quad (4.3)$$

またこの間に放出する光子の総数は、

$$N_{rev} = \int_0^\infty \mathcal{N}_{rev}(\omega) d\omega = \frac{5\sqrt{3}\pi}{3} \alpha\gamma \quad (4.4)$$

放出される光子の平均エネルギーは次のようになる。

$$\langle u \rangle = \frac{U_0}{N_{rev}} = \frac{4}{5\sqrt{3}} \frac{\hbar c \gamma^3}{\rho} = \frac{8}{15\sqrt{3}} \hbar\omega_c \quad (4.5)$$

また放出される光子の2乗平均エネルギーは次のようになる。

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{N_{rev}} \int_0^\infty (\hbar\omega)^2 \mathcal{N}_{rev}(\omega) d\omega = \frac{11}{27} (\hbar\omega_c)^2 \quad (4.6)$$

4.1.2 放射損失のビームエネルギー依存率

シンクロトロン放射による電子ビーム特性を求めるためには、放射損失のビームエネルギー依存性を知る必要がある。これを行うために以下の手続きを進める*2。

磁場中を運動する粒子のエネルギー損失率は(3.110)式から計算することができる。ここでも2つの偏光成分は合計して扱うことにする。 $l = c\Delta t$ の軌道長を走るときに、1個の電子が放出するエネルギーは次式で与えられる。

$$P_{tot} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma^4}{\rho^2} l \quad (4.7)$$

ここで曲率半径 $\rho \approx \frac{m_e \gamma c}{eB}$ は磁場を使って表してやる*3。

$$P_{tot} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{eB}{m_e \gamma c} \right)^2 \gamma^4 l = \frac{e^2 c^3}{2\pi} C_\gamma E^2 B^2 \Delta t \equiv P_\gamma \Delta t \quad (4.8)$$

ここでビームエネルギー $E = m_e \gamma c^2$ を使い、さらに次に定義される定数 C_γ を用いた。

$$C_\gamma \equiv \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{(m_e c^2)^3} \approx 2.1508 \times 10^{25} \text{mJoule}^3 \approx 8.846 \times 10^{-5} \text{mGeV}^3 \quad (4.9)$$

ここで r_e は次に示される古典電子半径である。

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \approx 2.81794 \times 10^{-15} \text{m} \quad (4.10)$$

*2 この章内では超相対論的粒子 $\beta = 1$ を仮定する。このときビームのエネルギーと運動量は定数 c の違いだけで同等に扱われる。

*3 ここでは後戻りの印象を与えるかも知れない。前章のシンクロトロン放射光の計算ではビームエネルギーの参照値からのずれを扱うようになっていなかったため、ここでその作業を行う必要がある。

参照エネルギー電子の周回当たりエネルギー損失は、

$$U_0 \equiv U_{rev}(0) = \frac{C\gamma E_0^4}{2\pi} \oint \frac{ds}{\rho^2} = \frac{C\gamma E_0^4}{\rho_0} \quad (4.11)$$

最後の等号は加速器の磁場が一定値（等磁場条件） ρ_0 の時に成立する。また当然これは(3.119)式の結果と一致している。

エネルギー偏差 ΔE のある電子の周回当たりエネルギー損失を次のように見積もる。エネルギー放射損失量は、(4.8)式に見るように、ビームエネルギー、磁場値そして時間の長さ（あるいは軌道長）に依存している。まず、軌道長によるエネルギー放射量の違いが表現できるようにして評価を始めよう。

$$\begin{aligned} U_{rev}(\Delta E) &= \oint P_\gamma(E_0 + \Delta E) dt = \oint P_\gamma(E_0 + \Delta E) \frac{dt}{ds} ds \\ &= \oint \left(P_\gamma(E_0) + \Delta E \left. \frac{dP_\gamma}{d\Delta E} \right|_{\Delta E=0} \right) \frac{1}{c} \left(1 + \frac{x}{\rho_0} \right) ds \\ &= \oint \left(P_\gamma(E_0) + \Delta E \left. \frac{dP_\gamma}{d\Delta E} \right|_{\Delta E=0} \right) \frac{1}{c} \left(1 + \frac{\eta}{\rho_0} \frac{\Delta E}{E_0} \right) ds \quad (4.12) \end{aligned}$$

上式の演算で2行目から3行目への移行に際して、水平位置 x はベータトロン振動位相に関して平均化操作をした。これによって、振動数が速いベータトロン振動の寄与を消去し、シンクロトロン振動に付随するエネルギー偏差によって変動する成分のみを考慮の対象とする。また、この軌道位置を運動量分散関数とエネルギー偏差によって表現している。

ここで放射エネルギー損失量のビームエネルギー偏差への線形依存率を評価しよう。

$$\Delta_{rad} \equiv \left. \frac{dU_{rev}(\Delta E)}{d\Delta E} \right|_{\Delta E=0} = \frac{1}{c} \oint \left(\left. \frac{dP_\gamma}{d\Delta E} \right|_{\Delta E=0} + P_\gamma(E_0) \frac{\eta}{\rho_0} \frac{1}{E_0} \right) ds \quad (4.13)$$

上式被積分関数の第1項は(4.14)式から理解されるように2つの部分から成る。第1の部分はビームエネルギー偏差に直接依存する項で、第2の部分は磁場の変化*4を通じてビームエネルギー偏差に依存する項である。

$$\left. \frac{dP_\gamma}{d\Delta E} \right|_{\Delta E=0} = 2 \frac{P_\gamma(E_0)}{E_0} + 2 \frac{P_\gamma(E_0)}{B} \left. \frac{dB}{d\Delta E} \right|_{\Delta E=0} \quad (4.14)$$

ビームエネルギー偏差に依存する磁場変化項は、磁場勾配と運動量分散関数を使って表現される。

$$\frac{dB}{d\Delta E} = \frac{\partial B}{\partial x} \frac{dx}{d\Delta E} = \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\eta}{E_0} \quad (4.15)$$

以上を纏めると、次のようになる。

$$\Delta_{rad} = \left. \frac{dU_{rev}(\Delta E)}{d\Delta E} \right|_{\Delta E=0}$$

*4 これはエネルギー変化の結果、水平方向にビーム軌道が移動して異なる磁場値の所を通る事に対応する。

$$\begin{aligned}
&= \frac{U_0}{E_0} \left[2 + \frac{1}{cU_0} \oint \left\{ \eta P_\gamma \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{2}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \right) \right\}_{\Delta E=0} ds \right] \\
&= \frac{U_0}{E_0} (2 + \mathcal{D})
\end{aligned} \tag{4.16}$$

ここで、積分部分を表す \mathcal{D} を次式で定義した。

$$\mathcal{D} \equiv \frac{1}{cU_0} \oint \left\{ \eta P_\gamma \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{2}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \right) \right\}_{\Delta E=0} ds \tag{4.17}$$

もし4極磁場と2極磁場が、参照運動量粒子の軌道上で重畳せず分離されているなら、 \mathcal{D} は次のように評価される。

$$\mathcal{D} = \frac{1}{cU_0} \oint \eta P_\gamma \frac{1}{\rho_0} ds \tag{4.18}$$

さらに等磁場条件を満たす加速器の場合には次のようになる。

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\eta}{\rho_0^2} ds \equiv \frac{R}{\rho_0} \alpha \tag{4.19}$$

ここでモメンタムコンパクションファクターと呼ばれる α は次式で定義され、ビームエネルギー偏差から生じる軌道長の変化率を示す。

$$\alpha = \frac{1}{2\pi R} \oint \frac{\eta}{\rho} ds \tag{4.20}$$

ここで R は平均軌道半径である。

4.2 放射減衰

シンクロトロン放射によるビームエネルギー損失は、先に学んだ粒子の振動に対して影響を及ぼし、振動の減衰へと導く。そしてこの影響はシンクロトロン振動とベータトロン振動の両者に生じる。

4.2.1 シンクロトロン振動

シンクロトロン放射によるエネルギー損失とそれを補う高周波加速の働きを、既に学んだ転送行列の方法で調べてみよう。シンクロトロン放射によるビームエネルギー損失と高周波加速空洞によるエネルギー補給の様子を図4.1に模式的に表した。

簡単化された転送行列で問題を分かり易く取り扱うために次の限定条件を設定する*5。
すなわち、

- 加速空洞およびシンクロトロン放射が起こる場所はリング中の各々1箇所*6とする。

*5 複雑で分かり難く厳密な取扱は計算機シミュレーションによって行うことができる。しかし基本的な考え方は此処で述べるものと同じである。

*6 この仮定は加速空洞についてはともかく、放射損失については現実的とはいえないが、簡単化のために用いる。

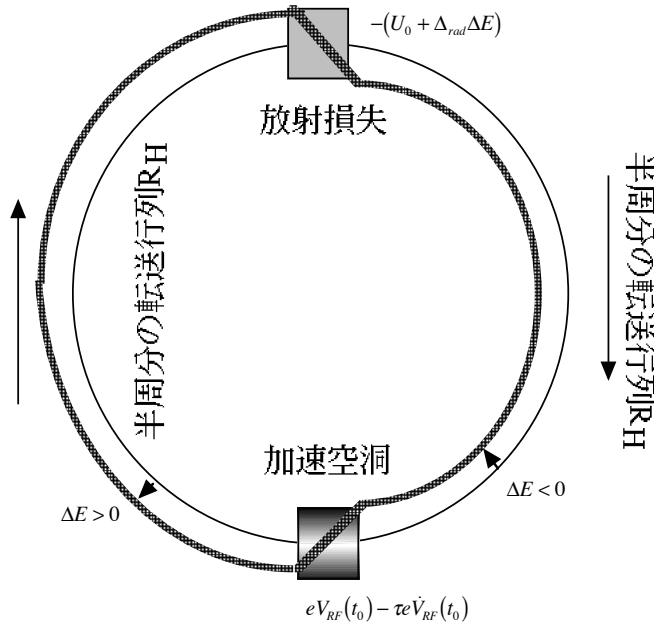


図 4.1 ビームエネルギー変動模式図。シンクロトロン放射によるエネルギー損失と高周波加速によるエネルギー補給。

- 更にそれらの場所では運動量分散関数はその微分を含めて消去されているものとする。これにより「分離されたシンクロトロン振動」として 2×2 転送行列でシンクロトロン振動のみ取り出して扱える。
- リングの収束磁石システムには最低 2 の周期性があるものとする。この仮定により加速空洞の場所から放射損失の場所へあるいは放射損失点から加速空洞の場所まで、リング半周分の同一の転送行列 R_H で運動が追跡できる。

転送行列による表現

■ **磁場要素** 磁場要素によるリング半周の転送行列 R_H は、(2.131) 式に示された様に区分対角化された 4×4 転送行列からシンクロトロン振動部分を抜き出して次式で表される。

$$R_H = \begin{pmatrix} 1 & g/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

■ **加速空洞** 加速空洞の働きは (2.117) 式に、転送行列 C_{acc} と正味の加速を表す非斉次項 \mathbf{c} を含む形で与えられている。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{out} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{e}{c^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{in} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e}{c p_0} V_{RF}(t_0) \end{pmatrix} \\ &\equiv C_{acc} \begin{pmatrix} c\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{in} + \mathbf{c} \end{aligned} \tag{4.22}$$

但し此処で電子は超相対論的であるとして $v_0 = c$ の近似をした。

■**放射損失** 放射損失については、周回当たり放射エネルギー損失の線形近似を表す次式を基に、

$$\begin{aligned} U_{rev}(\Delta E) &= U_{rev}(0) + \left. \frac{dU_{rev}(\Delta E)}{d\Delta E} \right|_{\Delta E=0} \Delta E \\ &= U_0 + \Delta_{rad}\Delta E \end{aligned} \quad (4.23)$$

次のように転送行列 S_{rad} とそれに付随する非斉次項 \mathbf{s} とで表現することができる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{out} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \Delta_{rad} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{in} - \begin{pmatrix} 0 \\ U_0/cp_0 \end{pmatrix} \\ &\equiv S_{rad} \begin{pmatrix} c\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{in} + \mathbf{s} \end{aligned} \quad (4.24)$$

電子は超相対論的であるとして近似をした。

リング一周の運動追跡

加速空洞の入り口から出発して、加速空洞、磁場半周、放射損失そして磁場半周後、再び元の地点に来るまでの運動を転送行列と非斉次項の混在した形で書き下すと次式のように書ける。

$$\mathbf{z}_{out} = R_H [S_{rad}R_H \{C_{acc}\mathbf{z}_{in} + \mathbf{c}\} - \mathbf{s}] \quad (4.25)$$

始め \mathbf{z}_{in} で出発した運動状態が周回後は \mathbf{z}_{out} になる。

■**平衡軌道** ここで特別解とその回りでの自由シンクロトン振動として運動を取扱う事にしよう。次式のようにリング一周で元に戻る \mathbf{z}_0 を求めると、これはシンクロトン振動の平衡軌道を表わす特別解である。

$$\mathbf{z}_0 \equiv \mathbf{z}_{out} = \mathbf{z}_{in} \quad (4.26)$$

上式を満たす \mathbf{z}_0 の成分を露に求める。

$$\begin{cases} c\tau &= \frac{2U_0 - (2 - \Delta_{rad})eV_{RF}(t_0)}{(-2 + \Delta_{rad})\frac{e}{c}\dot{V}_{RF}(t_0)} \\ \Delta p/p_0 &= \frac{U_0}{cp_0} \frac{1}{-2 + \Delta_{rad}} \end{cases} \quad (4.27)$$

時間 τ の原点をゼロにする条件を探すと、次式を満たすように t_0 を決めればよいことが分かる。即ち参照運動量粒子のエネルギー収支釣合条件である。

$$eV_{RF}(t_0) = \frac{2U_0}{2 - \Delta_{rad}} \approx U_0 \quad (4.28)$$

参照運動量粒子のエネルギー収支釣合条件から決まる平衡位相角は、

$$\omega_{RF}t_0 = \cos^{-1} \left(\frac{U_0}{e\hat{V}_{RF}} \right) \quad (4.29)$$

そして平衡位相角における加速電圧勾配が決まる。

$$\dot{V}_{RF}(t_0) = -\omega_{RF} \hat{V}_{RF} \sin \omega_{RF} t_0 \quad (4.30)$$

このとき加速空洞入り口における参照運動量粒子の運動量偏差は次のようになる。

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{-1}{2 - \Delta_{rad}} \frac{U_0}{c p_0} \approx -\frac{1}{2} \frac{U_0}{c p_0} \quad (4.31)$$

此処では明らかに参照運動量とはリングの場所毎に決まる量である。

■**減衰シンクロトロン振動** このように決まった平衡軌道を中心とする自由シンクロトロン振動は次の転送行列によって記述される。

$$R_H S_{rad} R_H C_{acc} = \begin{pmatrix} 1 - (1 - \frac{\Delta_{rad}}{2}) g \frac{e}{c^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) & (1 - \frac{\Delta_{rad}}{2}) g \\ -(1 - \Delta_{rad}) \frac{e}{c^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) & (1 - \Delta_{rad}) \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

これは放射損失のため Symplectic 条件を満たさない。そしてこの行列式を計算することで、シンクロトロン振動の Courant-Snyder 不変量の周回当たり減衰率が Δ_{rad} であることが示される。

$$\det |R_H S_{rad} R_H C_{acc}| = 1 - \Delta_{rad} \approx e^{-\Delta_{rad}} \quad (4.33)$$

エネルギー偏差ないし時間偏差の時間当たり振幅減衰率はリングの周回時間 T_0 を使って次式で与えられる。

$$\alpha_E = \frac{\Delta_{rad}}{2T_0} \quad (4.34)$$

シンクロトロン振動の1周期内における減衰が小さいと言う条件下で、減衰調和振動子としての解を書くことができる。

$$\alpha_E \ll \Omega \quad (4.35)$$

$$\tau(t) = \hat{\tau} e^{-\alpha_E t} \cos(\Omega t - \theta_0) \quad (4.36)$$

ここで Ω はシンクロトロン振動の角周波数で次式で与えられる。これは (2.135) 式で求めた Ω_s を周回時間で除した物に等しい。

$$\Omega = \frac{1}{T_0} \sqrt{g \frac{e}{c^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0)} \quad (4.37)$$

4.2.2 垂直方向ベータトロン振動

シンクロトロン放射の影響はベータトロン振動の減衰としても現れる。まず比較的状况の単純な垂直方向でその影響を考えてみる。

垂直ベータトロン振動の大きさを、(2.83) 式で定義した運動粒子の Courant-Snyder 不変量で評価する。これが放射時と引き続く加速時とにどの様な振る舞いをするか考えてみる。

$$W = \gamma(s) z(s)^2 + 2\alpha(s) z(s) z'(s) + \beta(s) z'(s)^2 \quad (4.38)$$

電子が放射によってエネルギーを失うとき、放射は殆ど電子の進行方向に放出される*7。このため放射の前後で、横方向運動量 p_y と平衡軌道に沿った運動量成分 p_s 同士の比率は、各々一定比率で減少するが、不変である。そのためこの放射過程では Courant-Snyder 不変量は保存する。

$$y' = \frac{p_y}{p_s} \quad (4.39)$$

一方加速空洞での加速に際しては、横方向運動量 p_y は一定のまま進行方向運動量成分 p_s のみ増加する。

$$y' = \frac{p_y}{p_s} \rightarrow \frac{p_y}{p_s + \delta p} = y' \left(1 - \frac{\delta p}{p_s} \right) \quad (4.40)$$

加速によるエネルギー増加 δE に対応して横方向運動量は次式のような減少 $\delta y'$ をする。

$$\delta y' = -y' \frac{\delta p}{p_s} \approx -y' \frac{\delta E}{E} \quad (4.41)$$

従って Courant-Snyder 不変量は次のように減少する。

$$\delta W = -2 (\alpha y y' + \beta y'^2) \frac{\delta E}{E} \quad (4.42)$$

ベータトロン振動を Twiss パラメータ、Courant-Snyder 不変量そしてベータトロン位相を使って表す。これは (2.80) 式および (2.81) 式と同じ物であり、 χ は (2.82) 式で与えられる。

$$\begin{cases} y &= \sqrt{W\beta} \cos(\phi - \theta) \\ y' &= \frac{\beta'}{2\beta} y - \sqrt{\frac{W}{\beta}} \sin(\phi - \theta) \\ &= -\sqrt{\frac{W}{\beta}} [\alpha \cos(\phi - \theta) + \sin(\phi - \theta)] \\ &= \sqrt{W\gamma} \sin(\phi - \theta - \chi) \end{cases} \quad (4.43)$$

Courant-Snyder 不変量の変動 (4.42) 式を評価するために、シンクロトロン放射はベータトロン位相と相関が無いと考えて、位相について平均操作をする。

$$\begin{cases} \langle yy' \rangle &= -\frac{\alpha}{2} W \\ \langle y'^2 \rangle &= \frac{\gamma}{2} W \end{cases} \quad (4.44)$$

この結果と、Twiss パラメータ間関係を使って纏めると、エネルギー放射に伴う Courant-Snyder 不変量の減少が次のように求められる。

$$\frac{\delta W}{W} = -\frac{\delta E}{E} \quad (4.45)$$

リング1周における放射損失の効果を平均する事により次の Courant-Snyder 不変量に関する微分方程式を得る。

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = -\frac{U_0}{T_0 E_0} \quad (4.46)$$

*7 先に学んだように、放射される光にはある範囲での角度拡がりがある。このことは後に考えるが、量子励起の垂直方向への影響をもたらす。

此処で T_0 は参照運動量粒子のリング周回時間である。

垂直ベータトロン振動の放射減衰による単位時間当たり振幅減衰率は次のようになる。

$$\alpha_y = \frac{1}{2} \frac{U_0}{T_0 E_0} \quad (4.47)$$

4.2.3 水平方向ベータトロン振動

水平方向における垂直方向との事情の違いは、曲率と運動量分散関数の存在である。エネルギー放射量自体、曲率のある場所では水平位置に依存する*8、更に、運動量分散関数が存在するとエネルギー放射に伴い電子平衡軌道が変化する。この二者の組み合わせから垂直方向とは若干異なった効果が生じる。

以下では垂直方向の時には現れなかったこの効果についてのみ検討を進め、最後に既に学んだ垂直方向の場合と共通の効果を足し合わせて考えることにしよう。

電子平衡軌道の変化を考慮するため、電子の軌道を自由ベータトロン振動と平衡軌道部分とに分離して表す。

$$\begin{cases} x &= x_\beta + x_{co} \\ x' &= x'_\beta + x'_{co} \end{cases} \quad (4.48)$$

平衡軌道変動は放出エネルギーと運動量分散関数との積で表せる。

$$\begin{cases} \delta x_{co} &= -\eta \frac{\delta E}{E} \\ \delta x'_{co} &= -\eta' \frac{\delta E}{E} \end{cases} \quad (4.49)$$

エネルギー放出に際して電子は垂直方向の時と同様、位置も角度も変化しない。

$$\begin{cases} \delta x &= 0 = \delta x_\beta + \delta x_{co} \\ \delta x' &= 0 = \delta x'_\beta + \delta x'_{co} \end{cases} \quad (4.50)$$

しかしエネルギー放出による平衡軌道の変化がベータトロン振動を励起する。

$$\begin{cases} \delta x_\beta &= \eta \frac{\delta E}{E} \\ \delta x'_\beta &= \eta' \frac{\delta E}{E} \end{cases} \quad (4.51)$$

このために次式のような水平方向特有の Courant-Snyder 不変量の変化が生じる。

$$\begin{aligned} \delta W &= 2 \{ \gamma x_\beta \delta x_\beta + \alpha (x'_\beta \delta x_\beta + x_\beta \delta x'_\beta) + \beta x'_\beta \delta x'_\beta \} \\ &= 2 \frac{\delta E}{E} \{ (\gamma \eta + \alpha \eta') x_\beta + (\alpha \eta + \beta \eta') x'_\beta \} \end{aligned} \quad (4.52)$$

基準座標上で Δs 進むとき粒子の描く軌道長 Δl は曲率のある場所では水平位置に依存し、従って放出エネルギー量も水平位置に依存する。

$$\delta E = \frac{\Delta l}{c} P_\gamma = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{x_\beta}{\rho} \right) \Delta s P_\gamma \quad (4.53)$$

*8 例えばセクター型磁石の場合、電子軌道が外側を通るとき、磁石内軌道長が延びるので、放射エネルギー量が大い。

さらに、磁場勾配がある磁石中では、軌道位置によって磁場強度が異なるため、放出エネルギー量に影響する。

$$P_\gamma = \left(P_\gamma|_{x=0} + x_\beta \frac{\partial P_\gamma}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) = P_\gamma|_{x=0} \left(1 + x_\beta \frac{2}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) \quad (4.54)$$

これらの効果を考慮することで、放出エネルギー量は次のようになる。

$$\delta E = \frac{P_\gamma|_{x=0}}{c} \left\{ 1 + x_\beta \left(\frac{1}{\rho} + \frac{2}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) \right\} \Delta s \quad (4.55)$$

上式を (4.52) 式に代入すれば Courant-Snyder 不変量の変動が次のように表せる。

$$\delta W = \frac{P_\gamma|_{x=0}}{c} \frac{2}{E} \left\{ 1 + x_\beta \left(\frac{1}{\rho} + \frac{2}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) \right\} \{ (\gamma\eta + \alpha\eta') x_\beta + (\alpha\eta + \beta\eta') x'_\beta \} \Delta s \quad (4.56)$$

ここで、次式で与えられるベータatron位相についての平均化操作を加える事で、

$$\begin{cases} \langle x_\beta^2 \rangle &= \frac{\beta}{2} W \\ \langle x_\beta x'_\beta \rangle &= -\frac{\alpha}{2} W \end{cases} \quad (4.57)$$

次の表式を得る。

$$\frac{\delta W}{W} = \frac{\Delta s P_\gamma}{cE} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{2}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \right) \eta \quad (4.58)$$

この表式をリング全体で積分した上で時間平均をとれば、Courant-Snyder 不変量の時間変動を表す微分方程式の項の中で、水平方向に特徴的な項が算出される。

$$\left(\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} \right)_{Hspecific} = \frac{1}{T_0 c E} \oint \eta P_\gamma \left(\frac{1}{\rho} + \frac{2}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \right) ds = \frac{U_0}{T_0 E} \mathcal{D} \quad (4.59)$$

上式では、式の中に表れた積分を (4.16) 式で定義した係数 \mathcal{D} を使って書き直している。ここで、垂直方向と共通の項を足し合わせることで水平方向ベータatron振動の時間当たり振幅減衰率として次の表式を得る。

$$\alpha_x = \frac{1}{2} \frac{U_0}{T_0 E_0} (1 - \mathcal{D}) \equiv \frac{1}{2} \frac{U_0}{T_0 E_0} J_x \quad (4.60)$$

ここで新たに定義された $J_x = (1 - \mathcal{D})$ は水平方向減衰分配係数 (Horizontal damping partition number) と呼ばれる。

偏向磁場の強度が一様な等磁場条件を満たすリングでは、 P_γ は偏向磁石中で一定値 P_{γ_0} となりそれ以外の場所ではゼロである。また $\frac{1}{\rho}$ は偏向磁石中でのみゼロでない値 $\frac{1}{\rho_0}$ をとる。この場合には、(4.19) 式の時と同じく係数 \mathcal{D} は次のように簡単化される。

$$\mathcal{D} = \frac{1}{cU_0} \oint \eta P_\gamma \left(\frac{1}{\rho} + \frac{2}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \right) ds \quad (4.61)$$

$$= \frac{P_{\gamma_0}}{cU_0} \oint \frac{\eta}{\rho} ds \quad (4.62)$$

$$= \frac{1}{2\pi\rho_0} \oint_{mag} \frac{\eta}{\rho_0} ds \quad (4.63)$$

$$= \frac{R}{\rho_0} \alpha \quad (4.64)$$

ここで $\oint_{mag} ds$ はリングに沿って偏向磁石中でのみ行う積分、 U_0 は周回当たりのエネルギー放出量、 α はモメンタムコンパクションファクターである。

4.3 ビームの平衡分布

シンクロトロン放射の影響は、既に見たシンクロトロン振動やベータトロン振動の減衰だけではない。シンクロトロン放射は光子として量子化されたエネルギーの放出であるために、ビーム運動に雑音的揺らぎをもたらす。この揺らぎと放射減衰の結果、ビームのエネルギー拡がりやエミッタンスは、加速器パラメータから決まる特定の値を取るようになる。

4.3.1 量子励起と中心極限定理

多数の光量子のランダムな放出を統計的に取り扱い、電子ビーム特性に与える影響を見積もることができる。この中で中心極限定理 (Central Limit Theorem) が重要な役割を果たす。

この定理の主張は

「互いに独立な確率変数の和は、或条件の下では、近似的にガウスの正規分布に成る。」
ということである。

此処で或条件とは、数学的には色々難しいことがあるようだが、簡単に言えば、「非常に多数の和であること、そして少数の確率変数が特に大きく他を圧倒するようなことがないこと。」である。

これをシンクロトロン放射に当てはめれば、減衰時間内の放出光子数が充分多いこと、そして極端に高いエネルギーの光子放出がないことである。さらに独立な確率変数と言う条件から、電子のベータトロンないしシンクロトロン振動の位相と光子放出との間に相関のないことが要求される。

このような条件が満たされていれば、個々の光子のエネルギー分布は図 3.6 に従っているが、それを積み上げた個々の電子の (減衰時間内の) 放出エネルギー量はガウス分布に従う。

4.3.2 エネルギー分布

量子化されたシンクロトロン放射をする電子のエネルギー偏差^{*9}を考えてみよう。

時間 t における特定の電子のエネルギー偏差は、無限の過去から現在に至る、無数の光子放出と引き続く放射減衰の蓄積効果の結果と考えることで次式に表現することができる。

$$\Delta E(t) = \sum_{i(t_i < t)} u_i e^{-(t-t_i)\alpha_E} \cos \Omega(t-t_i) \quad (4.65)$$

此処で i 番目の放出光子エネルギー u_i とその放出時刻 t_i とは統計的に与えられる確率変

^{*9} 超相対論的電子の場合、運動量偏差と同義語と考えて良い。

数である。一方シンクロトロン振動減衰率 α_E とシンクロトロン振動の角周波数 Ω は確定した量で既に求めてある。

電子エネルギー偏差の2乗を次の形に書き、

$$\begin{aligned}\Delta E(t)^2 &= \sum_{i(t_i < t)} u_i e^{-(t-t_i)\alpha_E} \cos \Omega(t-t_i) \sum_{j(t_j < t)} u_j e^{-(t-t_j)\alpha_E} \cos \Omega(t-t_j) \\ &= \sum_{i,j(t_i, t_j < t)} u_i u_j e^{-(t-t_i)\alpha_E} e^{-(t-t_j)\alpha_E} \cos \Omega(t-t_i) \cos \Omega(t-t_j)\end{aligned}\quad (4.66)$$

上式から出発して電子エネルギー偏差の2乗を、バンチ内電子全体を想定したアンサンブル平均として計算できれば電子ビームのエネルギー分布の分散が得られることになる。

ここで、一シンクロトロン振動周期内の放射減衰は充分小さいことを仮定する。これにより次式を満足する特性時間 Δt を導入することができる。

$$\alpha_E \ll \frac{1}{\Delta t} \ll \frac{\Omega}{2\pi} \quad (4.67)$$

ここで特性時間 Δt 内において、確率変数 u_i と t_i に関してアンサンブル平均を取ってみよう。 $\langle \rangle$ はこの中の量のアンサンブル平均を表す。

$$\langle \Delta E(t)^2 \rangle = \left\langle \sum_{i,j(t_i, t_j < t)} u_i u_j e^{-(t-t_i)\alpha_E} e^{-(t-t_j)\alpha_E} \cos \Omega(t-t_i) \cos \Omega(t-t_j) \right\rangle \quad (4.68)$$

同じ放射減衰項を持つ部分を纏めて括るために、時間を特性時間 Δt 幅にスライスし、そのスライス内の総和とスライス毎の総和に分けて書く。

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \sum_{i,j(n\Delta t \leq 2t-(t_i+t_j) \leq (n+1)\Delta t)} u_i u_j e^{-\{2t-(t_i+t_j)\}\alpha_E} \cos \Omega(t-t_i) \cos \Omega(t-t_j) \right\rangle \quad (4.69)$$

既に仮定したように、特性時間 Δt 内では減衰項の変化は無視できる。そこで減衰項をアンサンブル平均の外に出すことができる。

$$\approx \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-n\Delta t\alpha_E} \left\langle \sum_{i,j(n\Delta t \leq 2t-(t_i+t_j) \leq (n+1)\Delta t)} u_i u_j \cos \Omega(t-t_i) \cos \Omega(t-t_j) \right\rangle \right\} \quad (4.70)$$

2個の光子放出の間に、シンクロトロン振動の位相に関して相関が無いと考えられるから、異なる放出光子エネルギーの積 $u_i u_j$ ($i \neq j$) はアンサンブル平均に寄与しない。

$$\begin{aligned}&\approx \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-n\Delta t\alpha_E} \left\langle \sum_{i(n\Delta t \leq 2t-2t_i \leq (n+1)\Delta t)} u_i^2 \cos^2 \Omega(t-t_i) \right\rangle \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-n\Delta t\alpha_E} \left\langle \sum_{i(n\Delta t \leq 2t-2t_i \leq (n+1)\Delta t)} u_i^2 \frac{1}{2} \{1 + \cos 2\Omega(t-t_i)\} \right\rangle \right\}\end{aligned}\quad (4.71)$$

特性時間 Δt 内でシンクロトロン振動の位相に関して平均ができ、これによりアンサンブル平均へ寄与するのは次の項のみである。

$$\approx \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-n\Delta t\alpha_E} \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i(n\Delta t \leq 2t - 2t_i \leq (n+1)\Delta t)} u_i^2 \right\rangle \right\} \quad (4.72)$$

特性時間 Δt 内におけるアンサンブル平均において、確率変数 u_i と t_i の分布は先に求めた統計的分布を再現するはずである。即ち (3.122) 式で与えられる2乗平均光子エネルギー $\langle u^2 \rangle$ および (3.120) 式の周回当たり放出光子数 N_{rev} を時間当たりに換算した物を使いアンサンブル平均を書くことができる*10。

$$\langle \Delta E(t)^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ e^{-n\Delta t\alpha_E} \frac{\Delta t}{2} \frac{N_{rev}}{T_0} \langle u^2 \rangle \right\} \quad (4.73)$$

現在から無限過去にまで積分することで、電子ビームのエネルギー偏差の分散が計算できる。

$$\langle \Delta E^2 \rangle = \frac{N_{rev} \langle u^2 \rangle}{4\alpha_E T_0} \quad (4.74)$$

上記の積分実行に際して次の関係を利用した。

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\Delta t\alpha_E} = \int_0^{\infty} e^{-t\alpha_E} dt = \frac{1}{\alpha_E} \quad (4.75)$$

中心極限定理が成立するならば、電子ビームのエネルギー分布の形はガウス関数である。

$$w(\Delta E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_E} \exp\left(-\frac{\Delta E^2}{2\sigma_E^2}\right) \quad (4.76)$$

そしてそのエネルギー分布の標準偏差は既に求められている。

$$\sigma_E^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta E)^2 w(\Delta E) d(\Delta E) = \langle \Delta E^2 \rangle = \frac{N_{rev} \langle u^2 \rangle}{4\alpha_E T_0} \quad (4.77)$$

この導出の中で中心極限定理の役割は決定的である。もし中心極限定理が成立しないときには、電子ビームのエネルギー分布はガウス型でなくなる。思いつくままにその例を挙げてみよう。

- シンクロトロン振動が非線形なとき。⇒ 大振幅振動時、ビームローディング効果
- 特性時間が設定できないとき。⇒ 放射減衰が非常に速いとき、シンクロトロン振動が非常に遅いとき
- 特性時間内に放出される光子数が充分多くないとき。⇒ 非常に高いエネルギー光子放出、残留ガスやビーム間相互作用による Bremsstrahlung
- 異なる光子放出の間にシンクロトロン位相に関して相関があるとき。⇒ FEL 発振

*10 総和内の時間幅に注意。

4.3.3 ベータトロン振動の量子励起と自然エミッタンス

ベータトロン振動に対する光量子放出の効果を見積もろう。

水平方向

もはや不変量ではない Courant-Snyder 不変量が、光子の放出前後でどのくらい変化するか見積もる。エネルギー u の光子放出によって生じる Courant-Snyder 不変量の変動量 $\delta W(u)$ は光子放出点における Twiss パラメータと運動量分散関数を使って、次のように書ける。

$$\begin{aligned}\delta W(u) &= \beta \left(x' + \frac{u}{E} \eta' \right)^2 + 2\alpha \left(x' + \frac{u}{E} \eta' \right) \left(x + \frac{u}{E} \eta \right) + \gamma \left(x + \frac{u}{E} \eta \right)^2 \\ &\quad - (\beta x'^2 + 2\alpha x x' + \gamma x^2) \\ &= \left(\frac{u}{E} \right)^2 (\beta \eta'^2 + 2\alpha \eta \eta' + \gamma \eta^2) + 2 \frac{u}{E} \{ \beta x' \eta' + \alpha (x \eta' + x' \eta) + \gamma x \eta \}\end{aligned}\quad (4.78)$$

ここで E は運動電子のエネルギー。

ベータトロン振動について平均化操作を行うことで、光子エネルギーに関して2次の項が残る。

$$\delta W(u) = \left(\frac{u}{E} \right)^2 (\beta \eta'^2 + 2\alpha \eta \eta' + \gamma \eta^2) \equiv \left(\frac{u}{E} \right)^2 \mathcal{H}(s) \quad (4.79)$$

此处で定義された関数 $\mathcal{H}(s)$ は、円形加速器のラティス（ビーム収束光学系）構造によって決まる。

(4.79) 式に、電子が偏向磁石中を単位角度進行する時に放出する光子数スペクトル密度 (3.111) 式を掛けて、光子全エネルギーに渡って積分する。さらにリング1周の平均を取ることで、光子放出に伴う Courant-Snyder 不変量の変動を表す微分方程式中の励起項が計算される。

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{QE} = \frac{1}{T_0} \oint \int_0^\infty \frac{d\mathcal{F}_{tot}(\omega)}{d\phi} \delta W(\hbar\omega) d\omega \frac{ds}{\rho} \quad (4.80)$$

ここで、光子数スペクトル密度は、リング中の場所毎で偏向磁場強度に依存する量として、次式で与えられている。

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{F}_{tot}(\omega)}{d\phi} &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \alpha \gamma \frac{1}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^\infty K_{5/3}(y) dy \\ &= \frac{4}{9} \alpha \gamma \frac{1}{\omega} S\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\end{aligned}\quad (4.81)$$

さらに等磁場条件が成立するときは、放射光スペクトルは場所に依存しないため、次のように簡単化される。

$$\frac{d\mathcal{F}_{tot}(\omega)}{d\phi} = \frac{\mathcal{N}_{rev}(\omega)}{2\pi} \quad (4.82)$$

このとき微分方程式の励起項は次のように求められる。

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dW}{dt} \right|_{QE} &= \frac{1}{T_0} \oint_{mag} \int_0^\infty \frac{N_{rev}(\omega)}{2\pi} \left(\frac{\hbar\omega}{E} \right)^2 \mathcal{H}(s) d\omega \frac{ds}{\rho} \\
 &= \frac{N_{rev} \langle u^2 \rangle}{T_0 E^2} \oint_{mag} \mathcal{H}(s) \frac{ds}{2\pi\rho} \\
 &= \frac{N_{rev} \langle u^2 \rangle}{T_0 E^2} \langle \mathcal{H}(s) \rangle_{mag}
 \end{aligned} \tag{4.83}$$

ここで $\langle \mathcal{H}(s) \rangle_{mag}$ は偏向磁石中での平均を表す。

Courant-Snyder 不変量の平衡値 W_{Eq} は次に示す量子励起と放射減衰の釣り合い条件から決まる。

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{Tot} = \left. \frac{dW}{dt} \right|_{QE} + \left. \frac{dW}{dt} \right|_{RD} = \left. \frac{dW}{dt} \right|_{QE} - 2\alpha_x W = 0 \tag{4.84}$$

自然エミッタンス ε_x は Courant-Snyder 不変量の平衡値 W_{Eq} から次のように計算される。ここでは、リング中どこでもシンクロトロン放射スペクトルが同じになる様に、等磁場条件を仮定した。

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &\equiv \frac{1}{2} W_{Eq} = \frac{1}{2} \frac{1}{2\alpha_x} \left. \frac{dW}{dt} \right|_{QE} = \frac{1}{2} \frac{1}{2\alpha_x} \frac{N_{rev} \langle u^2 \rangle}{T_0 E^2} \langle \mathcal{H}(s) \rangle_{mag} \\
 &= \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{\hbar}{m_0 c} \frac{\gamma^2}{J_x \rho} \langle \mathcal{H}(s) \rangle_{mag}
 \end{aligned} \tag{4.85}$$

1行目から2行目への変形では、水平ベータatron振幅放射減衰率 (4.60) 式およびシンクロトロン放射の統計的性格として纏めた (4.4) 式と (4.6) 式を代入した。また J_x は (4.59) 式で定義した水平方向減衰分配係数であり、等磁場条件下では $1 - \frac{R}{\rho_0} \alpha$ となる (α はモメンタムコンパクションファクター)。

垂直方向

垂直方向では通常、運動量分散関数がゼロなので、エミッタンス発生元となる物が存在しない様に思える。しかし詳細に見れば、放射光自身にも発散角があり、それは前の章で求めたところに依ればおよそ $1/\gamma$ である。これによる Courant-Snyder 不変量の増加量は (4.79) 式に倣い次式で評価される。

$$\delta W = \left(\frac{u}{E} \right)^2 \beta \left(\frac{1}{\gamma} \right)^2 \tag{4.86}$$

超相対論的電子ではこの値はとても小さい。現実には垂直方向のエミッタンスを決めるのは、磁場誤差から生じる垂直方向運動量分散関数および水平方向との結合である。勿論、垂直方向の偏向磁石がある場合には、その影響は水平方向同様に生じるものである。

コメント

此処ではシンクロトロン放射によるエミッタンスやエネルギー拡がりの議論をした。しかし、此処の議論は中心極限定理が適用できる物理現象なら幅広く使える。

例えば、電子ビームと残留ガスとの散乱を考えてみよう。通常はビーム寿命を制限する1度の大幅散乱から要求真空度が決まる。しかしビーム損失にはつながらない小振幅散乱の効果もある。この小振幅多重散乱の効果は基本的にシンクロトロン放射に依る量子励起と同じであり、電子ビームエネルギー幅の増大やエミッタンスの増大を生じる。

さらにバンチ内電子同士のイントラビーム散乱や衝突型加速器のビームビーム間相互作用からも同様な寄与がある。

これらの寄与は、シンクロトロン放射の光子エネルギー分布と異なり、比較的大振幅側に裾野が延びている。このため単一大振幅散乱が大きな影響を持ち易く、中心極限定理の成立条件を脅かし、非ガウス型テイル分布の発生原因になりがちである。

目次

1.1	実空間と位相空間におけるビーム表現の違い	4
1.2	サイン型軌跡、コサイン型軌跡そして任意初期値の軌跡。上図は実空間、 下図は位相空間に於ける記述。	8
1.3	簡単な光学系。	9
1.4	位相空間表現：点光源から出た光の結像。	10
1.5	位相空間の楕円。	12
2.1	粒子運動を記述する座標系。	16
2.2	セクター磁石と矩形磁石による端部効果の差。	23
2.3	上より順番に、自由空間 ($K = 0$)、収束磁石 ($K = -0.5$) そして発散 磁石 ($K = 0.5$) の中で位相空間点が移動する様子。全図に共通した初期 値として、 $(z_0, z'_0) = (0, n)$ 、 n は -5 から 5 の間の全整数を選んだ。さ らに発散磁石の初期値には、 $(z_0, z'_0) = (n, 0)$ 、 n としては -5 から 5 の 間の全整数を付け加えてある。 $l = 0$ から $l = 1$ を実線で $l = -1$ から $l = 0$ を破線で表してある。	26
2.4	特性根の位置とビーム運動の安定性。●で示す位置に特性根の対が在れ ばビーム運動は安定、一方○の様になると不安定である。	29
3.1	運動点電荷と観測者の位置関係記述法	46
3.2	運動粒子座標系と観測者座標系	55
3.3	偏向磁石放射光の座標系	59
3.4	偏向磁石シンクロトロン放射光のエネルギー別光子数角度分布。	63
3.5	偏向磁石シンクロトロン放射光の全放射パワー角度分布。	65
3.6	関数 $S(\xi)$ の振る舞い。	67
3.7	アンジュレータ放射の座標系	68
3.8	スペクトルピーク周辺の S_N 関数の振る舞い。	74
4.1	ビームエネルギー変動模式図。シンクロトロン放射によるエネルギー損 失と高周波加速によるエネルギー補給。	83

索引

- adiabatic damping, 40
- AGS, 44
- BNL, 44
- canonical motion, 6
- canonical transformation, 6
- CERN, 44
- CPS, 44
- edge effect, 25
- equation of motion, 6
- Hamiltonian, 6
- J-PARC, 44
- KEK, 45
- LEP, 45
- phase space, 5
- real space, 6
- SAD, 10
- slippage factor, 46
- symplectic condition, 6
- transfer matrix, 9
- TRISTAN, 5, 45
- wedge effect, 25
- アイコナル, 15
- アイコナル方程式, 16
- アンジュレータ, 55
 - undulator, 18
- アンペール・マクスウェルの法則, 47
- 位相安定性, 44
- 位相空間, 5
- 位相空間楕円, 13
- 色収差, 37
- 因果律, 48
- 運動エネルギー保存則, 21
- 運動方程式, 6, 17
- 運動方程式の成分表示, 21
- 運動量のずれ, 24
- 運動量偏差, 36
- エネルギー獲得量, 39
- エミッタンス, 9, 33
- 遠距離場近似, 55
- 欧州原子核研究所, 44
- 扇形磁石, 25
- 拡大縮小率, 11
- 角密度光子数スペクトル, 58
- 角密度パワー, 56
- 角密度パワースペクトル, 57
- 観測者, 49
- 観測者時間, 49
- 幾何学的エミッタンス, 40
- 幾何光学, 11, 15
- 基準座標曲線, 17
- 擬調和振動子, 29
- 強収束加速器, 44
- 行列式, 9
- 曲率, 19
- Courant-Snyder 不変量, 33
- 矩形磁石, 25
- 楔形効果, 25
- クロマティシテイ, 37
- 経路長増加, 44
- 結像条件, 11
- 光源特性, 12
- 高周波加速空洞, 25
- 光線追跡, 11
- コサイン型軌跡, 10
- コサイン型初期値, 28
- 最大運動量偏差, 45
- 最大時間偏差, 45
- サイン型軌跡, 10
- サイン型初期値, 28
- 座標ベクトルの微分, 20
- 作用, 16
- 参照運動量, 22
- 時間表示電場, 57
- 時間変換係数, 50
- 時間偏差, 37
- 磁束密度, 20
- 実空間, 6
- 磁場に関するガウスの法則, 47
- 周回行列, 35
- 周期的条件, 28

- 自由空間, 11, 22
- 収束作用, 23
- 収束磁石
 - focusing magnet, 23
- 集束レンズ, 11
- 周波数表示電場, 57
- 従法線ベクトル, 19
- 従来型光源, 12
- 自由電子レーザー, 57
- シンクロトロン振動, 22, 36
 - synchrotron oscillation, 17
- シンクロトロン振動数
 - シンクロトロンチューン, 44
- シンクロトロン放射, 6
- 進行方向運動量成分, 40
- 振幅関数, 13
- 振幅項, 32
- Symplectic 行列, 9
- Symplectic 行列, 41
- Symplectic 条件, 41
- シンプレクティック条件, 6

- スカラーポテンシャル, 16, 48

- 正規化エミッタンス
 - normalised emittance, 39
- 静止質量, 20
- 正準運動, 6
- 正準共役運動量, 40
- 正準変換, 6
- 正準方程式, 9
- 正則, 30
- セクター型磁石, 25
- 接線ベクトル, 19
- 線形運動, 10
- 線形近似, 23
- 線形クロマティシティ, 37
- 線形結合, 29
- 線形独立解, 10, 29

- 相対論係数, 20, 22
- 相対論的運動学, 26

- 大強度陽子加速器施設, 44
- 楕円の記述, 13
- ダランベール演算子, 16
- 断熱減衰, 39
- 端部効果, 25

- 遅延 Green 関数, 48
- 遅延ポテンシャル, 48
- 超相対論的粒子, 22
- 貯蔵型光源加速器, 6
- 直交座標系, 19

- Twiss パラメーター, 13, 31
- Twiss パラメーターの変換規則, 36

- Dirac のデルタ関数, 48
- デカルト座標, 48
- 電界強度, 20
- 電荷保存則, 47
- 点光源, 11

- 転送行列, 9
 - transfer matrix, 17
- 電場に関するガウスの法則, 47
- 電場の Feynmann 表現, 53

- 到達時間差, 37
- 特性方程式, 30
- トランジションエネルギー, 44
- トランジションエネルギー, 17
- トリスタン, 5
- ドリフト空間
 - drift space, 22

- 2極磁石
 - dipole magnet, 24

- ねじれ率, 19

- 波数ベクトル, 15
- 発光体時間, 49
- 発散作用, 23
- 発散磁石
 - defocusing magnet, 23
- 発散レンズ, 11
- 波動方程式, 15, 48
- ハミルトニアン, 6
- ハミルトン-ヤコビの運動方程式, 16
- パンチ長, 45

- 光のドップラーシフト, 50
- 微細構造定数, 58
- 非線形運動, 10
- ビーム輸送路, 17
- Hill の方程式, 29

- Faraday の電磁誘導の法則, 48
- フリンジ場効果, 25
- ブルックヘブン国立研究所, 44
- Frenet-Serret の公式, 17
- Floquet の定理, 29
- 分離されたシンクロトロン振動, 43

- 閉軌道, 42
- ベクトルポテンシャル, 16, 47
- ベータ関数, 13
- ベータトロン振動, 22, 28
 - betatron oscillation, 17
- ベータトロン振動数, 35
- ベータトロンチューン, 35
- 偏向磁石
 - bending magnet, 24
- 偏光特性, 53

- ポインティングベクトル, 56
- 放射エネルギー損失, 25
- 法線ベクトル, 19

- Maxwell の方程式, 47

- 見かけの運動, 49
- 右手系, 19

- ヤコビアン, 8

陽子シンクロトロン, 44
横方向運動量成分, 40
4行4列転送行列, 36
4極磁石, → quadrupole magnet
拡張4元ベクトル, 36

ラプラシアン, 48

Liouville の定理, 6
粒子トラッキング, 9
粒子のエネルギー変動, 36
量子励起, 6

Lorentz ゲージ条件, 48
Lorentz 力, 20