

SAD School

電子貯蔵リングの  
ビームエミッタンス

2011年5月18日

鎌田進



# この講義の狙い

- 電子（陽電子）貯蔵型加速器で、ビームエネルギー広がりやビームエミッタンス等のビーム特性が決まるメカニズムを物理学的に理解する。**SAD内部の計算方法には立ち入らない。**
- 次のような加速器で、この現象が重要。  
KEKB, PEP-II, LEP, TRISTAN, SuperKEKB : 電子・陽電子円形コライダー  
SPring-8, PF, PF-AR, Spring-8次期計画 : リング型放射光源  
ATF, SuperKEKBダンピングリング : (陽) 電子ダンピングリング  
LHC : 超高エネルギー陽子円形コライダー



# 放射光生成がもたらすビーム特性

- 古典的な放射では、エミッタンスは無限に小さくなる。

(放射減衰)

- 量子化された放射（光子放出）のため、ビーム運動には確率的揺らぎが生じる。

(量子励起)

- これら2者の平衡条件から、ビームエミッタンスが決まる。

(履歴に拠らない貯蔵ビーム特性)



# あらすじ

I. シンクロトロン放射の性質（まとめ）

II. 放射減衰 (Radiation Damping)

進行方向, 垂直方向, 水平方向

III. 量子励起 (Quantum Excitation)

進行方向, 垂直方向, 水平方向

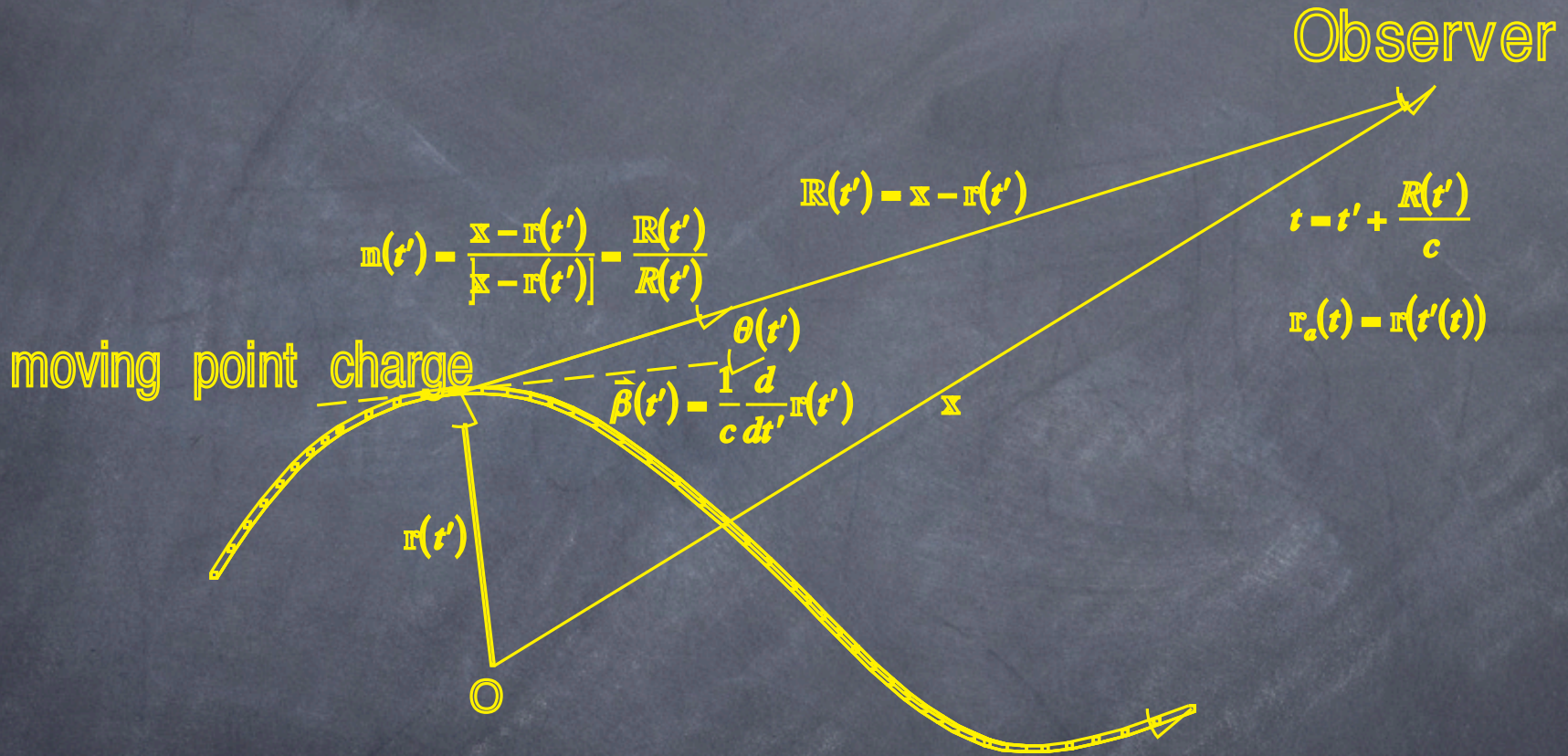
IV. 平衡分布 (Equilibrium Distribution)

進行方向, 水平方向, 垂直方向



# 放射光の生成

- Maxwell方程式から、運動する荷電粒子は光る。



- ## ● 放射場のFeynmann表現 (観測者時間 $t$ で見た運動)

$$E(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathbf{n}}{R^2} + \frac{R}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{n}}{R^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \mathbf{n}}{dt^2} \right\}$$



# 放射場のFeynmann表現を睨むと

見かけの運動を考えれば、放射光の性質が分かる

- 光のドップラー効果（運動体時間 vs 観測者時間）
- 偏向磁場  
パルス光  
臨界周波数 $\omega_c$ を中心に幅広いスペクトル（白色光）
- アンジュレータ  
電子の周期運動を反映した連続パルス光  
準単色光とその高調波光  
→ FELに発展する道



# 偏向磁石シンクロトロン放射光のスペクトル

## 光子数スペクトル密度

$$\mathcal{N}_{rev}(\omega) = \sqrt{3}\alpha\gamma\frac{1}{\omega_c}\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(y) dy \quad (3.113)$$

## パワースペクトル密度

$$P_{rev}(\omega) = \sqrt{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c}\gamma\frac{\omega}{\omega_c}\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(y) dy \equiv \frac{2}{9}\frac{e^2}{\epsilon_0 c}\gamma S\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (3.114)$$

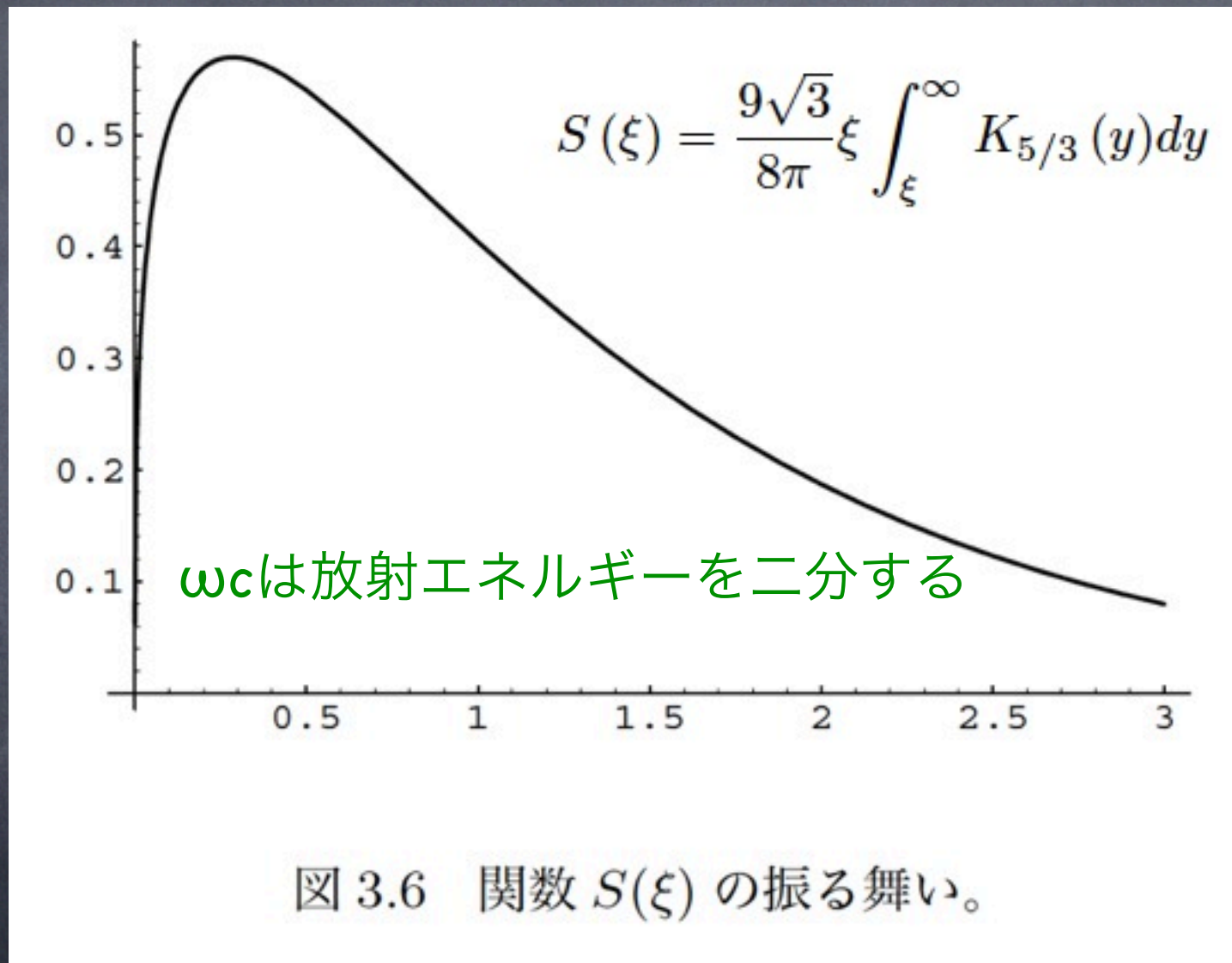
## 臨界周波数

ここで  $\omega_c$  は電子の相対論係数  $\gamma$  と曲率半径  $\rho_0$  で次のように決まる臨界周波数である。  
また  $\alpha$  は微細構造定数である。

$$\omega_c = \frac{3}{2}\frac{c\gamma^3}{\rho_0} \quad (3.112)$$



# $S(\xi)$ 関数の形状

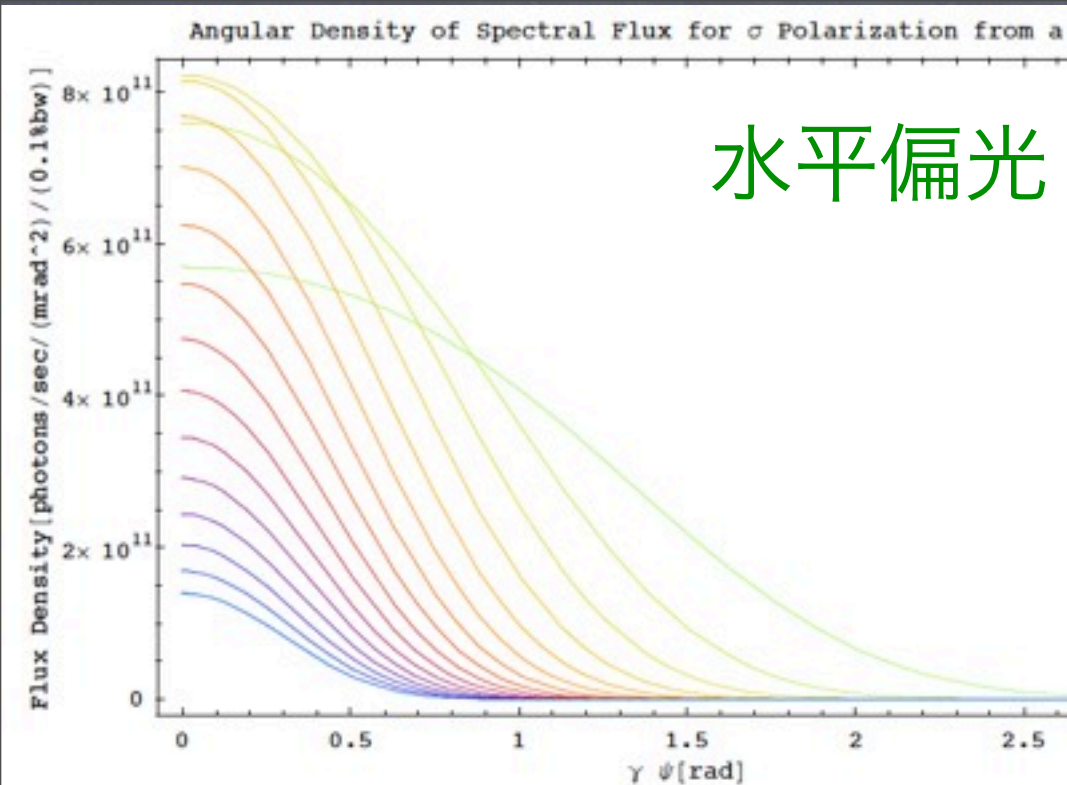




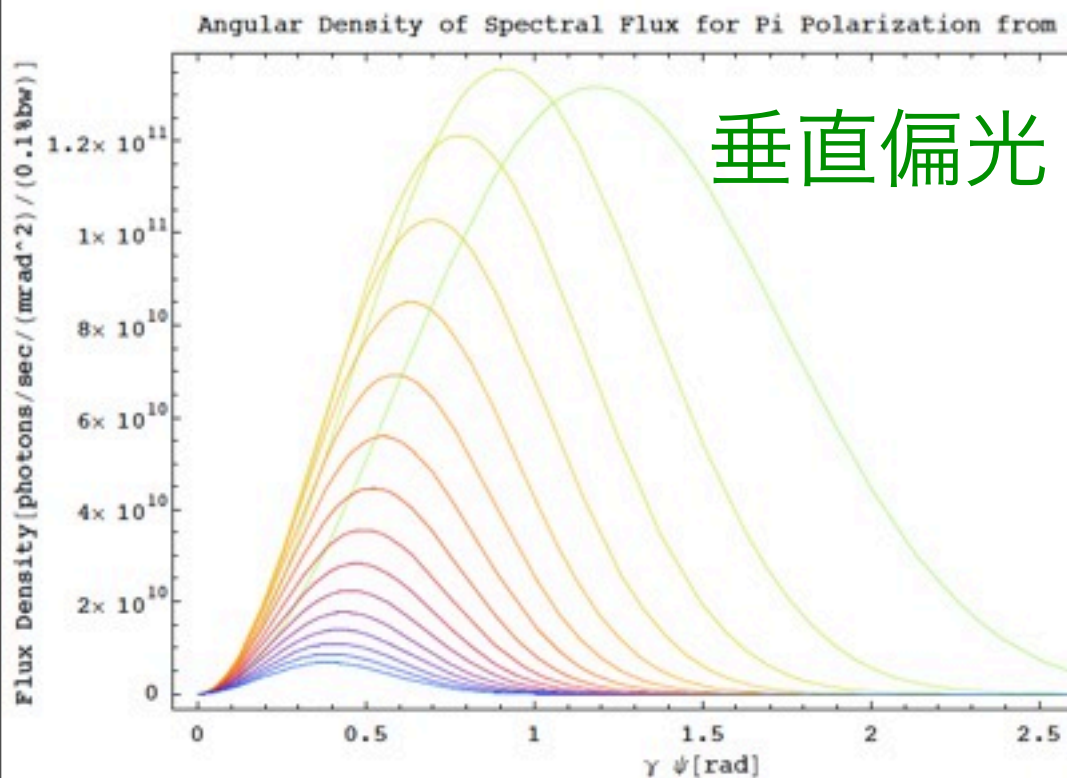
# 波長別偏向磁石放射光角分布

各図には臨界波長  $\omega_c$  の10倍の波長から10分の1の波長まで計21本の曲線が描かれている。ただし短波長側は線幅の範囲でゼロになっている物がある。

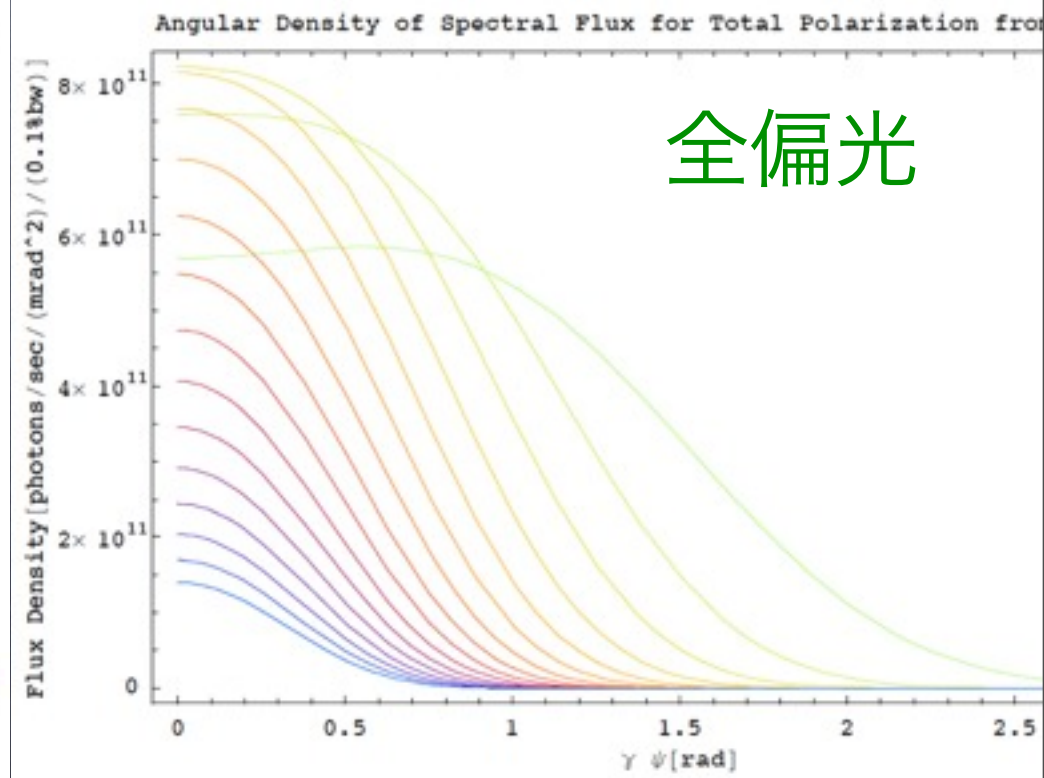
## 水平偏光



## 垂直偏光



## 全偏光





# 偏向磁石シンクロトロン放射光パワーの角分布

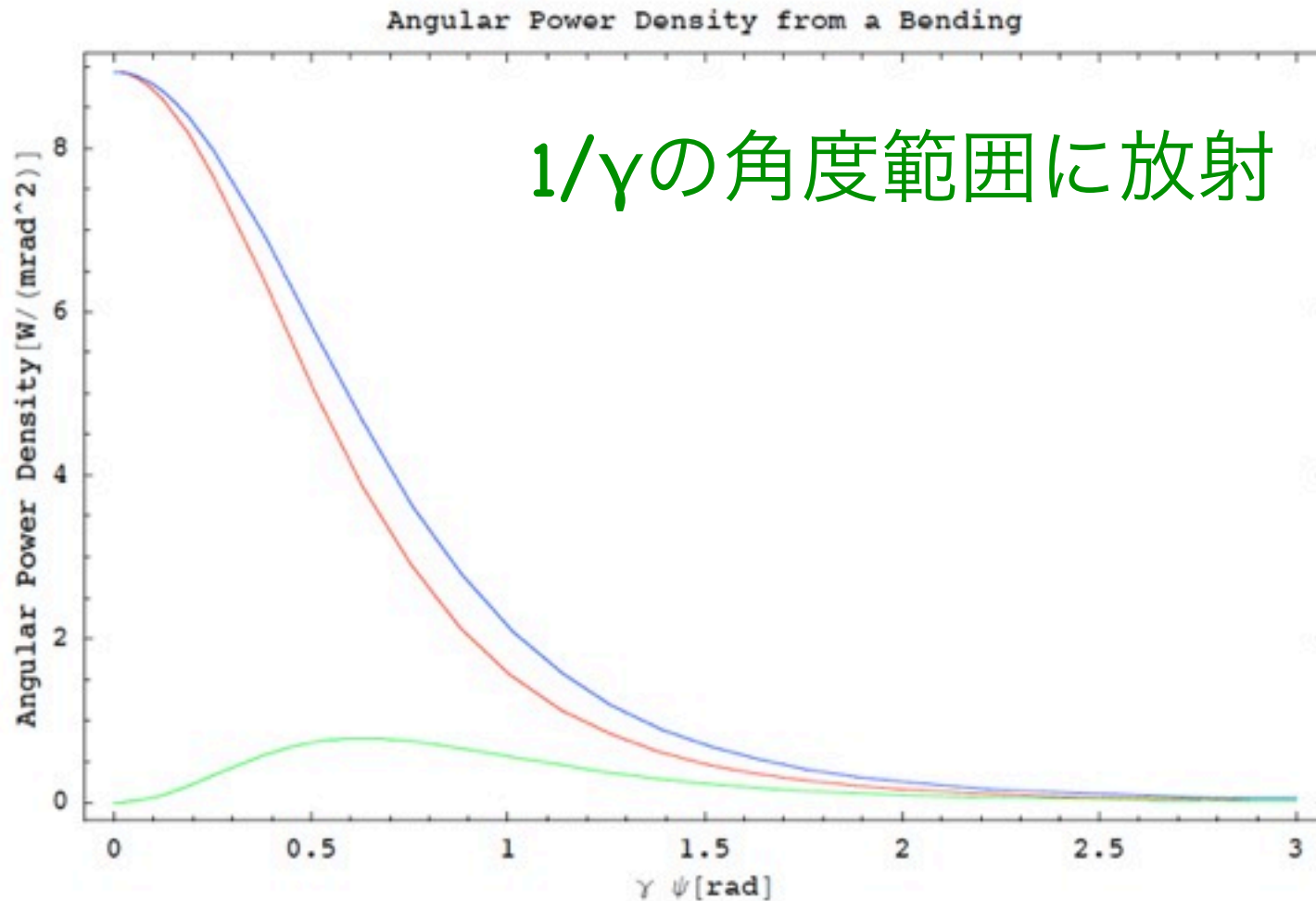


図 3.5 偏向磁石シンクロトロン放射光の全放射パワー角度分布。



# 電子の立場から見た シンクロトロン放射の性質（まとめ）

電子がリング加速器一周の間に失う放射エネルギーは、

$$U_0 \equiv \int_0^\infty P_{rev}(\omega) d\omega = \frac{e^2}{3\epsilon_0} \frac{\gamma^4}{\rho_0} \quad (4.3)$$

またこの間に放出する光子の総数は、

$$N_{rev} = \int_0^\infty \mathcal{N}_{rev}(\omega) d\omega = \frac{5\sqrt{3}\pi}{3} \alpha \gamma \quad (4.4)$$

$\alpha$ は微細構造定数

放出される光子の平均エネルギーは次のようになる。

$$\langle u \rangle = \frac{U_0}{N_{rev}} = \frac{4}{5\sqrt{3}} \hbar c \frac{\gamma^3}{\rho_0} = \frac{8}{15\sqrt{3}} \hbar \omega_c \quad (4.5)$$

$\omega_c$ は放射の臨界周波数

また放出される光子の2乗平均エネルギーは次のようになる。

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{N_{rev}} \int_0^\infty (\hbar \omega)^2 \mathcal{N}_{rev}(\omega) d\omega = \frac{11}{27} (\hbar \omega_c)^2 \quad (4.6)$$

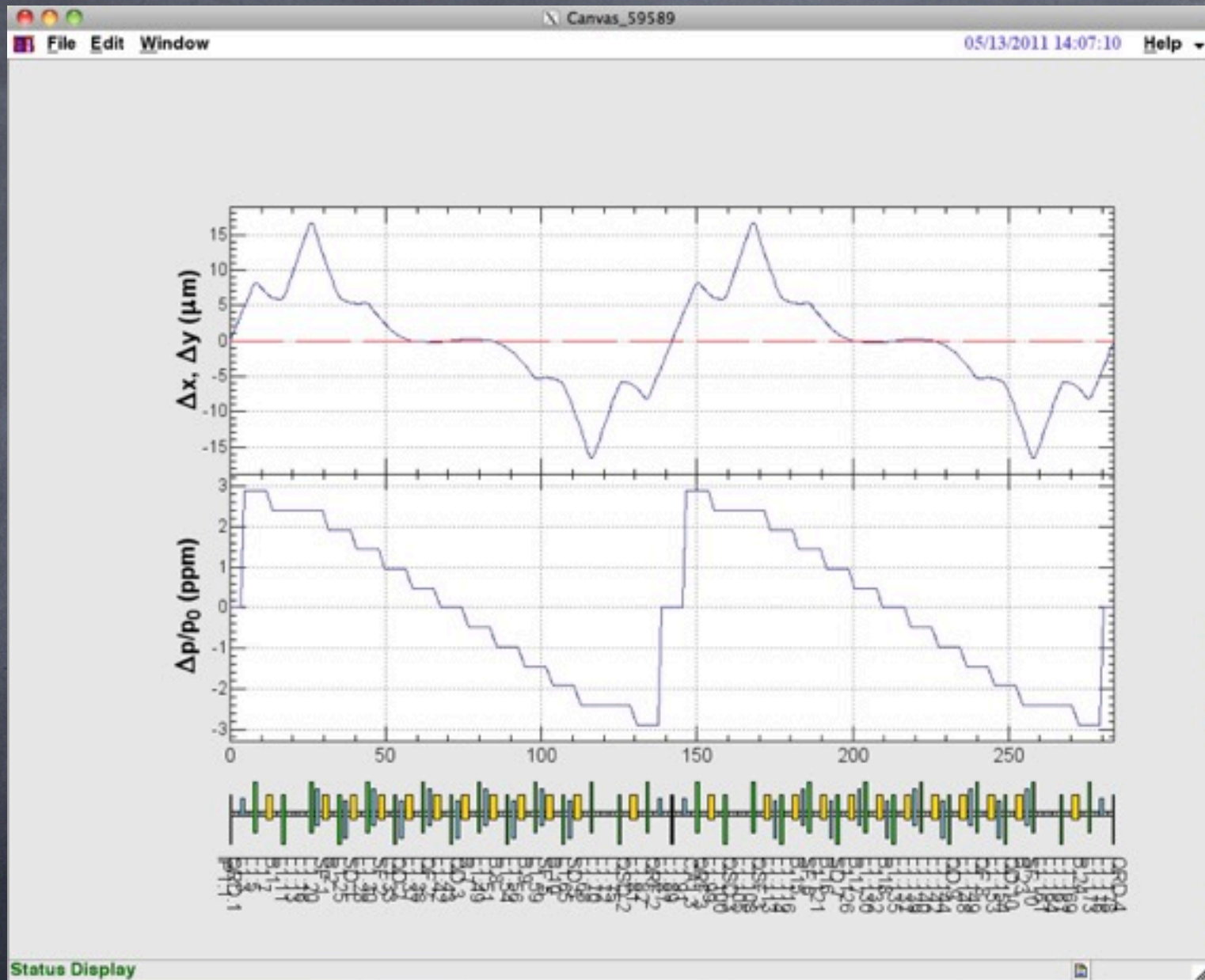


# 放射減衰 (Radiation Damping)

- 放射によるエネルギー損とRF加速がある時、  
6次元閉軌道が存在する。
- シンクロトロン放射により、  
6次元閉軌道を中心にした3自由度の振動が、  
減衰するメカニズムが存在する。



# Radiation LossとRF加速があるリング全周 SADによる6次元閉軌道計算



表示方法：radcod, codplot, emitの入力後、

```
op2:=(OpticsPlot[{"DX","DY"},{"DDP"}],GridLines->{Automatic,Automatic}];Update[];);op2;
```



# 6次元閉軌道を中心にした 進行方向振動(シンクロトロン振動) (注意)

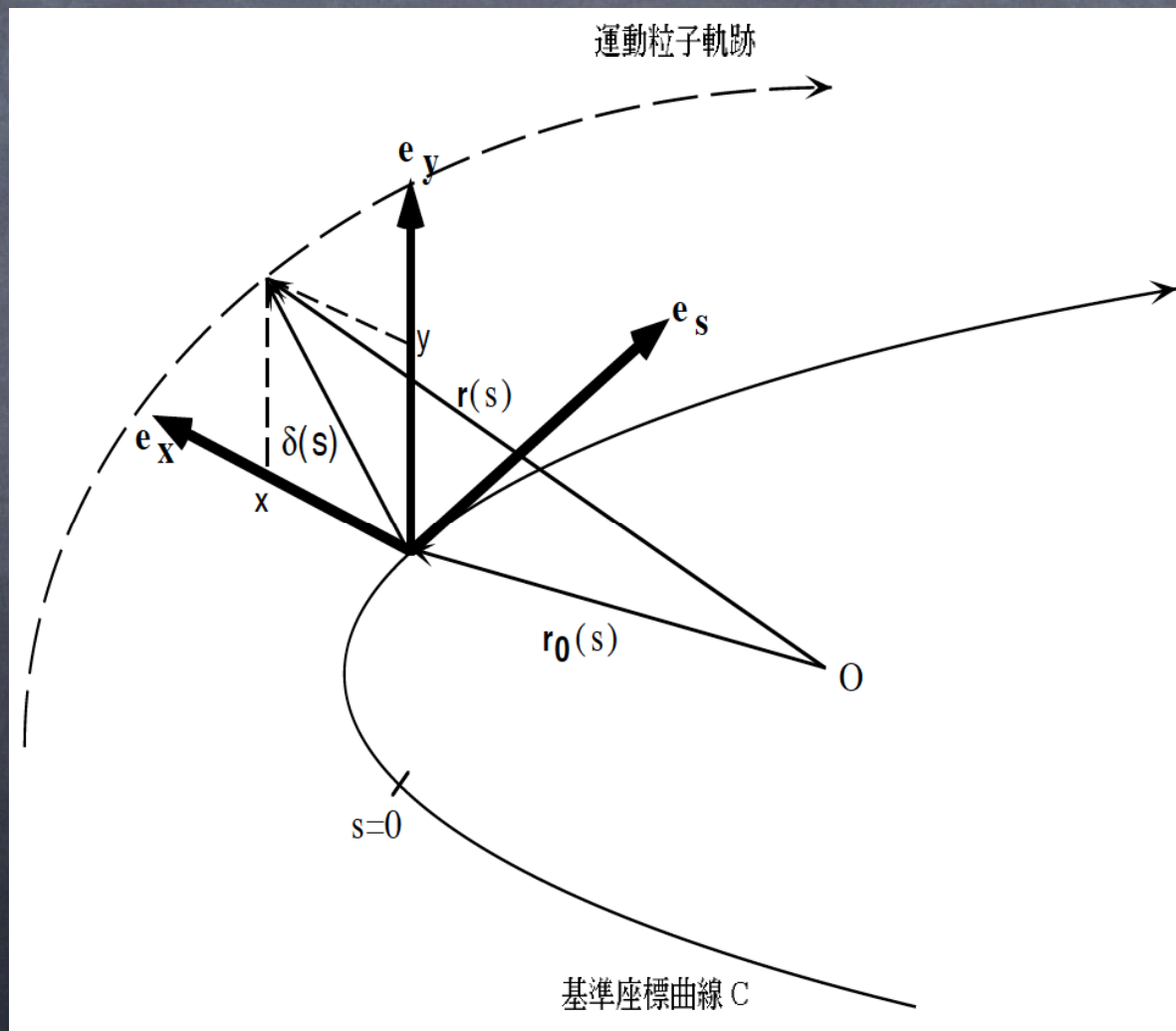
説明を分かり易いするため、これからの取り扱いはベータトロン振動とシンクロトロン振動の分離条件が満たされる時のみ有効です。もちろん、SAD計算ではこのような制約はありません。

- 加速空洞の設置場所およびビーム運動観測点において、運動量分散関数とその傾きがゼロ
- 詳細は、テキスト第2章4節「周回運動  
II シンクロトロン振動」を参照。



# 加速器ビーム粒子位置の記述方法

基準座標曲線を決め、下図に従って、  
その上に張った座標系 $(x, y, s)$ で位置を記述。





# 簡単な加速器モデル

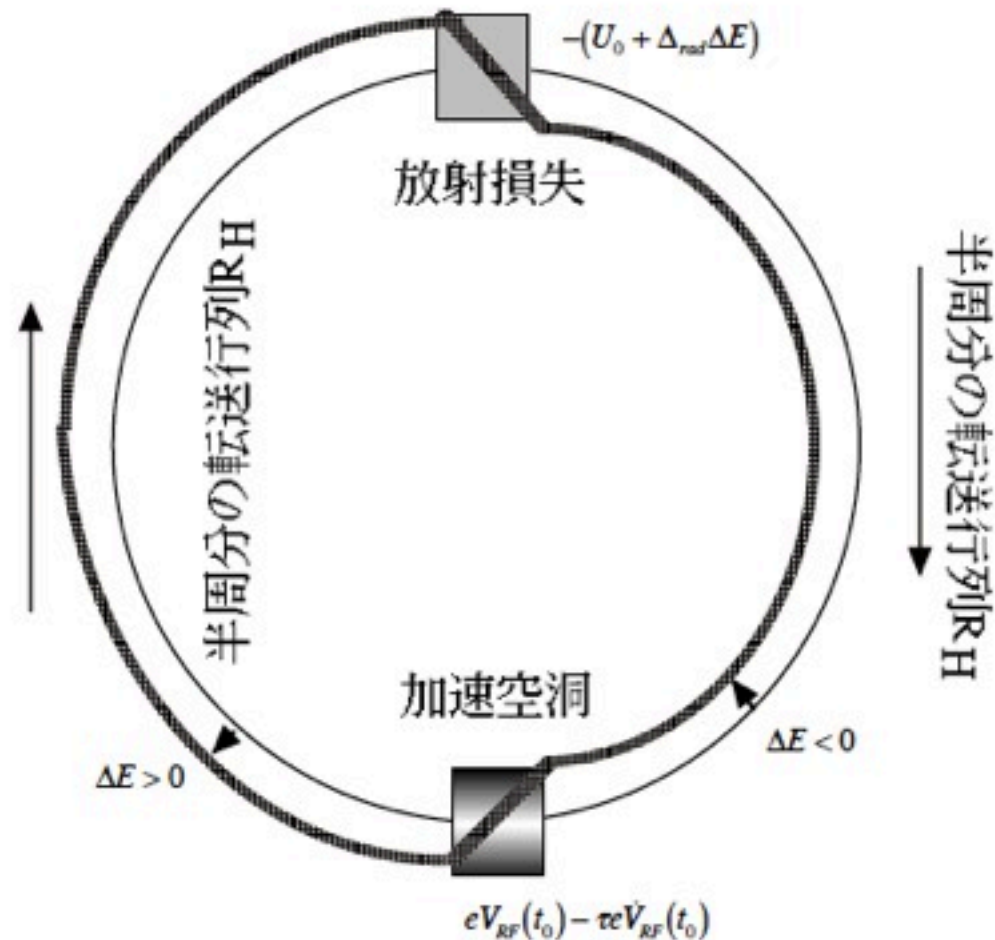


図 4.1 ビームエネルギー変動模式図。シンクロトロン放射によるエネルギー損失と高周波加速によるエネルギー補給。



# 磁石の (進行方向)転送行列

■磁場要素 磁場要素によるリング半周の転送行列  $R_H$  は、(2.131) 式に示された様に区分対角化された  $4 \times 4$  転送行列からシンクロトン振動部分を抜き出して次式で表される。

$$R_H = \begin{pmatrix} 1 & g/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$



# (薄い)加速空洞の(進行方向)転送行列

■加速空洞 加速空洞の働きは (2.117) 式に、転送行列  $C_{acc}$  と正味の加速を表す非斉次項  $\mathbf{c}$  を含む形で与えられている。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{out} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{e}{c^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{in} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e}{c p_0} V_{RF}(t_0) \end{pmatrix} \\ &\equiv C_{acc} \begin{pmatrix} c\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{in} + \mathbf{c} \end{aligned} \quad (4.22)$$

但し此处で電子は超相対論的であるとして  $v_0 = c$  の近似をした。

6次元閉軌道を原点にとれば、非斉次項は消える。



# Radiation Lossを考慮した (薄い)偏向磁石の(進行方向)転送行列

■放射損失 放射損失については、周回当たり放射エネルギー損失の線形近似を表す次式を基に、

$$\begin{aligned} U_{rev}(\Delta E) &= U_{rev}(0) + \left. \frac{dU_{rev}(\Delta E)}{d\Delta E} \right|_{\Delta E=0} \Delta E \\ &= U_0 + \Delta_{rad} \Delta E \end{aligned} \quad (4.23)$$

次のように転送行列  $S_{rad}$  とそれに付随する非斉次項  $s$  とで表現することができる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{out} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \Delta_{rad} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{in} - \begin{pmatrix} 0 \\ U_0/cp_0 \end{pmatrix} \\ &\equiv S_{rad} \begin{pmatrix} c\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{in} + s \end{aligned} \quad (4.24)$$

電子は超相対論的であるとして近似をした。

6次元閉軌道を原点にとれば、非斉次項は消える。



# $\Delta rad$ が減衰率を決める

磁場中を運動する粒子のエネルギー損失率は (3.110) 式から計算することができる。ここでも 2 つの偏光成分は合計して扱うことにする。 $l = c\Delta t$  の軌道長を走るときに、1 個の電子が放出するエネルギーは次式で与えられる。

$$P_{tot} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma^4}{\rho^2} l \quad (4.7)$$

ここで曲率半径  $\rho \approx \frac{m_e \gamma c}{eB}$  は磁場を使って表してやる\*3。

$$P_{tot} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{eB}{m_e \gamma c} \right)^2 \gamma^4 l = \frac{e^2 c^3}{2\pi} C_\gamma E^2 B^2 \Delta t \equiv P_\gamma \Delta t \quad (4.8)$$

ここでビームエネルギー  $E = m_e \gamma c^2$  を使い、さらに次に定義される定数  $C_\gamma$  を用いた。

$$C_\gamma \equiv \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{(m_e c^2)^3} \approx 2.1508 \times 10^{25} \text{mJoule}^3 \approx 8.846 \times 10^{-5} \text{mGeV}^3 \quad (4.9)$$

ここで  $r_e$  は次に示される古典電子半径である。

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \approx 2.81794 \times 10^{-15} \text{m} \quad (4.10)$$



# エネルギー偏差 $\Delta E$ の粒子の 周回毎エネルギー損失量

エネルギー偏差  $\Delta E$  のある電子の周回当たりエネルギー損失を次のように見積もる。エネルギー放射損失量は、(4.8) 式に見るように、ビームエネルギー、磁場値そして時間の長さ（あるいは軌道長）に依存している。まず、軌道長によるエネルギー放射量の違いが表現できるようにして評価を始めよう。

$$\begin{aligned} U_{rev}(\Delta E) &= \oint P_{\gamma}(E_0 + \Delta E) dt = \oint P_{\gamma}(E_0 + \Delta E) \frac{dt}{ds} ds \\ &= \oint \left( P_{\gamma}(E_0) + \Delta E \left. \frac{dP_{\gamma}}{d\Delta E} \right|_{\Delta E=0} \right) \frac{1}{c} \left( 1 + \frac{x}{\rho_0} \right) ds \\ &= \oint \left( P_{\gamma}(E_0) + \Delta E \left. \frac{dP_{\gamma}}{d\Delta E} \right|_{\Delta E=0} \right) \frac{1}{c} \left( 1 + \frac{\eta}{\rho_0} \frac{\Delta E}{E_0} \right) ds \quad (4.12) \end{aligned}$$

上式の演算で2行目から3行目への移行に際して、水平位置  $x$  はベータトロン振動位相に関して平均化操作をした。これによって、振動数が速いベータトロン振動の寄与を消去し、シンクロトロン振動に付随するエネルギー偏差によって変動する成分のみを考慮の対象とする。また、この軌道位置を運動量分散関数とエネルギー偏差によって表現している。



# $\Delta_{rad}$ の導出

ここで放射エネルギー損失量のビームエネルギー偏差への線形依存率を評価しよう。

$$\Delta_{rad} \equiv \left. \frac{dU_{rev}(\Delta E)}{d\Delta E} \right|_{\Delta E=0} = \frac{1}{c} \oint \left( \left. \frac{dP_{\gamma}}{d\Delta E} \right|_{\Delta E=0} + P_{\gamma}(E_0) \frac{\eta}{\rho_0} \frac{1}{E_0} \right) ds \quad (4.13)$$

上式被積分関数の第1項は(4.14)式から理解されるように2つの部分から成る。第1の部分はビームエネルギー偏差に直接依存する項で、第2の部分は磁場の変化<sup>\*4</sup>を通じてビームエネルギー偏差に依存する項である。

$$\left. \frac{dP_{\gamma}}{d\Delta E} \right|_{\Delta E=0} = 2 \frac{P_{\gamma}(E_0)}{E_0} + 2 \frac{P_{\gamma}(E_0)}{B} \left. \frac{dB}{d\Delta E} \right|_{\Delta E=0} \quad (4.14)$$

ビームエネルギー偏差に依存する磁場変化項は、磁場勾配と運動量分散関数を使って表現される。

$$\frac{dB}{d\Delta E} = \frac{\partial B}{\partial x} \frac{dx}{d\Delta E} = \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\eta}{E_0} \quad (4.15)$$



# $\Delta_{rad}$

$$\begin{aligned}\Delta_{rad} &= \left. \frac{dU_{rev}(\Delta E)}{d\Delta E} \right|_{\Delta E=0} \\ &= \frac{U_0}{E_0} \left[ 2 + \frac{1}{cU_0} \oint \left\{ \eta P_\gamma \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{2}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \right) \right\}_{\Delta E=0} ds \right] \\ &= \frac{U_0}{E_0} (2 + \mathcal{D})\end{aligned}\tag{4.16}$$

ここで、積分部分を表す  $\mathcal{D}$  を次式で定義した。

$$\mathcal{D} \equiv \frac{1}{cU_0} \oint \left\{ \eta P_\gamma \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{2}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \right) \right\}_{\Delta E=0} ds\tag{4.17}$$

$J_s=2+\mathcal{D}$  : 進行方向減衰分配率(Longitudinal Damping Partition Number)



# 係数 $\mathcal{D}$ について

もし4極磁場と2極磁場が、参照運動量粒子の軌道上で重畳せず分離されているならば、 $\mathcal{D}$  は次のように評価される。

$$\mathcal{D} = \frac{1}{cU_0} \oint \eta P_\gamma \frac{1}{\rho_0} ds \quad (4.18)$$

さらに等磁場条件を満たす加速器の場合には次のようになる。

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\eta}{\rho_0^2} ds \equiv \frac{R}{\rho_0} \alpha \quad (4.19)$$

積分範囲は偏極磁石内部

次式で計算される  $\alpha$  はモメンタムコンパクションファクターと呼ばれ、ビームエネルギー偏差から生じる軌道長の変化率を示す量である。

$$\alpha = \frac{1}{2\pi R} \oint \frac{\eta}{\rho} ds \quad (4.20)$$

積分範囲は偏極磁石内部

ここで  $R$  は平均軌道半径である。

この議論は、セクター型偏向磁石を暗黙仮定



# 簡単な加速器モデル: (進行方向)周回行列

■減衰シンクロトロン振動 このように決まった平衡軌道を中心とする自由シンクロトロン振動は次の転送行列によって記述される。

$$R_H S_{rad} R_H C_{acc} = \begin{pmatrix} 1 - (1 - \frac{\Delta_{rad}}{2}) g \frac{e}{c^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) & (1 - \frac{\Delta_{rad}}{2}) g \\ -(1 - \Delta_{rad}) \frac{e}{c^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) & (1 - \Delta_{rad}) \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

これは放射損失のため Symplectic 条件を満たさない。そしてこの行列式を計算することで、シンクロトロン振動の Courant-Snyder 不変量の周回当たり減衰率が  $\Delta_{rad}$  であることが示される。

$$\det |R_H S_{rad} R_H C_{acc}| = 1 - \Delta_{rad} \approx e^{-\Delta_{rad}} \quad (4.33)$$

エネルギー偏差ないし時間偏差の時間当たり振幅減衰率はリングの周回時間  $T_0$  を使って次式で与えられる。

$$\alpha_E = \frac{\Delta_{rad}}{2T_0} \quad (4.34)$$

シンクロトロン振動の1周期内における減衰が小さいという条件下で、減衰調和振動子としての解を書くことができる。

$$\alpha_E \ll \Omega \quad (4.35)$$

$$\tau(t) = \hat{\tau} e^{-\alpha_E t} \cos(\Omega t - \theta_0) \quad (4.36)$$

ここで  $\Omega$  はシンクロトロン振動の角周波数で次式で与えられる。これは (2.135) 式で求めた  $\Omega_s$  を周回時間で除した物に等しい。

$$\Omega = \frac{1}{T_0} \sqrt{g \frac{e}{c^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0)} \quad (4.37)$$



# ベータトロン振動の減衰

## 垂直方向

垂直ベータトロン振動の大きさを、(2.83) 式で定義した運動粒子の Courant-Snyder 不変量で評価する。これが放射時と引き続く加速時とにどのような振る舞いをするか考えてみる。

$$W = \gamma(s)z(s)^2 + 2\alpha(s)z(s)z'(s) + \beta(s)z'(s)^2 \quad (4.38)$$



# シンクロトロン放射に際して

電子が放射によってエネルギーを失うとき、放射は殆ど電子の進行方向に放出される\*7。このため放射の前後で、横方向運動量  $p_y$  と平衡軌道に沿った運動量成分  $p_s$  同士の比率は、各々一定比率で減少するが、不変である。そのためこの放射過程では Courant-Snyder 不変量は保存する。

$$y' = \frac{p_y}{p_s} \quad (4.39)$$

Courant-Snyder不変量は保存

この取り扱いとはSAD座標系と異なる！！！！



# RF加速に際して

一方加速空洞での加速に際しては、横方向運動量  $p_y$  は一定のまま進行方向運動量成分  $p_s$  のみ増加する。

$$y' = \frac{p_y}{p_s} \rightarrow \frac{p_y}{p_s + \delta p} = y' \left( 1 - \frac{\delta p}{p_s} \right) \quad (4.40)$$

加速によるエネルギー増加  $\delta E$  に対応して横方向運動量は次式のような減少  $\delta y'$  をする。

$$\delta y' = -y' \frac{\delta p}{p_s} \approx -y' \frac{\delta E}{E} \quad (4.41)$$

従って Courant-Snyder 不変量は次のように減少する。

$$\delta W = -2 (\alpha y y' + \beta y'^2) \frac{\delta E}{E} \quad (4.42)$$

Courant-Snyder不変量は減少

この取り扱いとはSAD座標系と異なる！！！！



# シンクロトロン放射のタイミングは ベータトロン振動位相と無相関と仮定し平均化

ベータトロン振動を Twiss パラメター、Courant-Snyder 不変量そしてベータトロン位相を使って表す。これは (2.80) 式および (2.81) 式と同じ物であり、 $\chi$  は (2.82) 式で与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \sqrt{W\beta} \cos(\phi - \theta) \\ y' = \frac{\beta'}{2\beta} y - \sqrt{\frac{W}{\beta}} \sin(\phi - \theta) \\ \quad = -\sqrt{\frac{W}{\beta}} [\alpha \cos(\phi - \theta) + \sin(\phi - \theta)] \\ \quad = \sqrt{W\gamma} \sin(\phi - \theta - \chi) \end{array} \right. \quad (4.43)$$

Courant-Snyder 不変量の変動 (4.42) 式を評価するために、シンクロトロン放射はベータトロン位相と相関が無いと考えて、位相について平均操作をする。

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle yy' \rangle = -\frac{\alpha}{2} W \\ \langle y'^2 \rangle = \frac{\gamma}{2} W \end{array} \right. \quad (4.44)$$



# 垂直ベータトロン振動減衰率

この結果と、Twiss パラメーター間の関係を使って纏めると、エネルギー放射に伴う Courant-Snyder 不変量の減少が次のように求められる。

$$\frac{\delta W}{W} = -\frac{\delta E}{E} \quad (4.45)$$

リング 1 周における放射損失の効果を平均する事により次の Courant-Snyder 不変量に関する微分方程式を得る。

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = -\frac{U_0}{T_0 E_0} \quad (4.46)$$

此处で  $T_0$  は参照運動量粒子のリング周回時間である。

垂直ベータトロン振動の放射減衰による単位時間当たり振幅減衰率は次のようになる。

$$\alpha_y = \frac{1}{2} \frac{U_0}{T_0 E_0} \quad (4.47)$$

**$J_y=1$  : 垂直方向減衰分配率(Vertical Damping Partition Number)**



# ベータトロン振動の減衰

## 水平方向（運動量分散関数がゼロでない方向）

水平方向における垂直方向との事情の違いは、曲率と運動量分散関数の存在である。エネルギー放射量自体、曲率のある場所では水平位置に依存する\*<sup>8</sup>、更に、運動量分散関数が存在するとエネルギー放射に伴い電子平衡軌道が変化する。この二者の組み合わせから垂直方向とは若干異なった効果が生じる。

以下では垂直方向の時には現れなかったこの効果についてのみ検討を進め、最後に既に学んだ垂直方向の場合と共通の効果を足し合わせて考えることにしよう。



電子平衡軌道の変化を考慮するため、電子の軌道を自由ベータatron振動と平衡軌道部分とに分離して表す。

$$\begin{cases} x &= x_\beta + x_{co} \\ x' &= x'_\beta + x'_{co} \end{cases} \quad (4.48)$$

平衡軌道変動は放出エネルギーと運動量分散関数との積で表せる。

$$\begin{cases} \delta x_{co} &= -\eta \frac{\delta E}{E} \\ \delta x'_{co} &= -\eta' \frac{\delta E}{E} \end{cases} \quad (4.49)$$

エネルギー放出に際して電子は垂直方向の時と同様、位置も角度も変化しない。

$$\begin{cases} \delta x &= 0 = \delta x_\beta + \delta x_{co} \\ \delta x' &= 0 = \delta x'_\beta + \delta x'_{co} \end{cases} \quad (4.50)$$

しかしエネルギー放出による平衡軌道の変化がベータatron振動を励起する。

$$\begin{cases} \delta x_\beta &= \eta \frac{\delta E}{E} \\ \delta x'_\beta &= \eta' \frac{\delta E}{E} \end{cases} \quad (4.51)$$

このために次式のような水平方向特有の Courant-Snyder 不変量の変化が生じる。

$$\begin{aligned} \delta W &= 2 \{ \gamma x_\beta \delta x_\beta + \alpha (x'_\beta \delta x_\beta + x_\beta \delta x'_\beta) + \beta x'_\beta \delta x'_\beta \} \\ &= 2 \frac{\delta E}{E} \{ (\gamma \eta + \alpha \eta') x_\beta + (\alpha \eta + \beta \eta') x'_\beta \} \end{aligned} \quad (4.52)$$

エネルギー放射とベータatron位相が無相関なら、  
平均すれば消える、、、ところが



# 放出エネルギー量 $\delta E$ の軌道依存

基準座標上で  $\Delta s$  進むとき粒子の描く軌道長  $\Delta l$  は曲率のある場所では水平位置に依存し、従って放出エネルギー量も水平位置に依存する。

$$\delta E = \frac{\Delta l}{c} P_\gamma = \frac{1}{c} \left( 1 + \frac{x_\beta}{\rho} \right) \Delta s P_\gamma \quad (4.53)$$

さらに磁場勾配がある磁石では、

軌道位置によって磁場強度が異なるために放出エネルギー量が異なる

$$P_\gamma = \left( P_\gamma|_{x=0} + x_\beta \frac{\partial P_\gamma}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) = P_\gamma|_{x=0} \left( 1 + x_\beta \frac{2}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) \quad (4.54)$$

上式を (4.52) 式に代入すれば Courant-Snyder 不変量の変動が次のように表せる。

$$\delta W = \frac{P_\gamma|_{x=0}}{c} \frac{2}{E} \left\{ 1 + x_\beta \left( \frac{1}{\rho} + \frac{2}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) \right\} \{ (\gamma\eta + \alpha\eta') x_\beta + (\alpha\eta + \beta\eta') x'_\beta \} \Delta s \quad (4.56)$$



# 水平ベータトロン振動の減衰率

ここで、次式で与えられるベータトロン位相についての平均化操作を加える事で、

$$\begin{cases} \langle x_\beta^2 \rangle &= \frac{\beta}{2} W \\ \langle x_\beta x'_\beta \rangle &= -\frac{\alpha}{2} W \end{cases} \quad (4.57)$$

次の表式を得る。

$$\frac{\delta W}{W} = \frac{\Delta s P_\gamma}{cE} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{2}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \right) \eta \quad (4.58)$$

この表式をリング全体で積分した上で時間平均をとれば、Courant-Snyder 不変量の時間変動を表す微分方程式の項の中で、水平方向に特徴的な項が算出される。

$$\left( \frac{1}{W} \frac{dW}{dt} \right)_{Hspecific} = \frac{1}{T_0 c E} \oint \eta P_\gamma \left( \frac{1}{\rho} + \frac{2}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \right) ds = \frac{U_0}{T_0 E} \mathcal{D} \quad (4.59)$$

上式では、式中に表れた積分を (4.16) 式で定義した係数  $\mathcal{D}$  を使って書き直している。ここで、垂直方向と共通の項を足し合わせることで水平方向ベータトロン振動の時間当たり振幅減衰率として次の表式を得る。

$$\alpha_x = \frac{1}{2} \frac{U_0}{T_0 E_0} (1 - \mathcal{D}) \equiv \frac{1}{2} \frac{U_0}{T_0 E_0} J_x \quad (4.60)$$

ここで新たに定義された  $J_x = (1 - \mathcal{D})$  は水平方向減衰分配係数 (Horizontal damping partition number) と呼ばれる。



# ビームエネルギーの平衡分布

## 4.3.1 量子励起と中心極限定理

多数の光量子のランダムな放出を統計的に取り扱い、電子ビーム特性に与える影響を見積もることができる。この中で中心極限定理 (Central Limit Theorem) が重要な役割を果たす。

この定理の主張は

「互いに独立な確率変数の和は、或条件の下では、近似的にガウスの正規分布に成る。」  
ということである。

此処で或条件とは、数学的には色々難しいことがあるようだが、簡単に言えば、「非常に多数の和であること、そして少数の確率変数が特に大きく他を圧倒するようなことがないこと。」である。

これをシンクロトロン放射に当てはめれば、減衰時間内の放出光子数が充分多いこと、そして極端に高いエネルギーの光子放出がないことである。さらに独立な確率変数と言う条件から、電子のベータトロンないしシンクロトロン振動の位相と光子放出との間に相関のないことが要求される。

このような条件が満たされていれば、個々の光子のエネルギー分布は図 3.6 に従っているが、それを積み上げた個々の電子の (減衰時間内の) 放出エネルギー量はガウス分布に従う。



# 特定の電子の時刻 $t$ におけるエネルギー偏差

時間  $t$  における特定の電子のエネルギー偏差は、無限の過去から現在に至る、無数の光子放出と引き続く放射減衰の蓄積効果の結果と考えることで次式に表現することができる。

$$\Delta E(t) = \sum_{i(t_i < t)} u_i e^{-(t-t_i)\alpha_E} \cos \Omega(t-t_i) \quad (4.65)$$

此处で  $i$  番目の放出光子エネルギー  $u_i$  とその放出時刻  $t_i$  とは統計的に与えられる確率変数である。一方シンクロトロン振動減衰率  $\alpha_E$  とシンクロトロン振動の角周波数  $\Omega$  は確定した量で既に求めている。



# エネルギー偏差の2乗について アンサンブル平均を求めよう

電子エネルギー偏差の2乗を次の形に書き、

$$\begin{aligned}\Delta E(t)^2 &= \sum_{i(t_i < t)} u_i e^{-(t-t_i)\alpha_E} \cos \Omega(t-t_i) \sum_{j(t_j < t)} u_j e^{-(t-t_j)\alpha_E} \cos \Omega(t-t_j) \\ &= \sum_{i,j(t_i, t_j < t)} u_i u_j e^{-(t-t_i)\alpha_E} e^{-(t-t_j)\alpha_E} \cos \Omega(t-t_i) \cos \Omega(t-t_j)\end{aligned}\tag{4.66}$$

上式から出発して電子エネルギー偏差の2乗を、バンチ内電子全体を想定したアンサンブル平均として計算できれば電子ビームのエネルギー分布の分散が得られることになる。



# ダンピングが無視できるほど短く シンクロトロン振動位相は充分回る そんな、特性時間 $\Delta t$ を導入

ここで、一シンクロトロン振動周期内の放射減衰は充分小さいことを仮定する。これにより次式を満足する特性時間  $\Delta t$  を導入することができる。

$$\alpha_E \ll \frac{1}{\Delta t} \ll \frac{\Omega}{2\pi} \quad (4.67)$$

ここで特性時間  $\Delta t$  内において、確率変数  $u_i$  と  $t_i$  に関してアンサンブル平均を取ってみよう。 $\langle \rangle$  はこの中の量のアンサンブル平均を表す。

$$\langle \Delta E(t)^2 \rangle = \left\langle \sum_{i,j(t_i, t_j < t)} u_i u_j e^{-(t-t_i)\alpha_E} e^{-(t-t_j)\alpha_E} \cos \Omega(t-t_i) \cos \Omega(t-t_j) \right\rangle \quad (4.68)$$



# 特性時間 $\Delta t$ 幅で時間を輪切りに

同じ放射減衰項を持つ部分を纏めて括るために、時間を特性時間  $\Delta t$  幅にスライスし、そのスライス内の総和とスライス毎の総和に分けて書く。

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \sum_{i,j(n\Delta t \leq 2t-(t_i+t_j) \leq (n+1)\Delta t)} u_i u_j e^{-\{2t-(t_i+t_j)\}\alpha_E} \cos \Omega(t-t_i) \cos \Omega(t-t_j) \right\rangle \quad (4.69)$$

既に仮定したように、特性時間  $\Delta t$  内では減衰項の変化は無視できる。そこで減衰項をアンサンブル平均の外に出すことができる。

$$\approx \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-n\Delta t\alpha_E} \left\langle \sum_{i,j(n\Delta t \leq 2t-(t_i+t_j) \leq (n+1)\Delta t)} u_i u_j \cos \Omega(t-t_i) \cos \Omega(t-t_j) \right\rangle \right\} \quad (4.70)$$



# 異なる光子放出の間に シンクロトロン位相の相関が無い 残る項は自分同士だけ

2個の光子放出の間に、シンクロトロン振動の位相に関して相関が無いと考えられるから、異なる放出光子エネルギーの積  $u_i u_j$  ( $i \neq j$ ) はアンサンブル平均に寄与しない。

$$\begin{aligned}
 &\approx \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-n\Delta t \alpha_E} \left\langle \sum_{i(n\Delta t \leq 2t - 2t_i \leq (n+1)\Delta t)} u_i^2 \cos^2 \Omega(t - t_i) \right\rangle \right\} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-n\Delta t \alpha_E} \left\langle \sum_{i(n\Delta t \leq 2t - 2t_i \leq (n+1)\Delta t)} u_i^2 \frac{1}{2} \{1 + \cos 2\Omega(t - t_i)\} \right\rangle \right\}
 \end{aligned}
 \tag{4.71}$$



# 輪切りにした時間に関する総和を 積分形に書いて実行

特性時間  $\Delta t$  内におけるアンサンブル平均において、確率変数  $u_i$  と  $t_i$  の分布は先に求めた統計的分布を再現するはずである。即ち (3.122) 式で与えられる 2 乗平均光子エネルギー  $\langle u^2 \rangle$  および (3.120) 式の周回当たり放出光子数  $N_{rev}$  を時間当たりに換算した物を使いアンサンブル平均を書くことができる\*10。

$$\langle \Delta E(t)^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ e^{-n\Delta t\alpha_E} \frac{\Delta t}{2} \frac{N_{rev}}{T_0} \langle u^2 \rangle \right\} \quad (4.73)$$

現在から無限過去にまで積分することで、電子ビームのエネルギー偏差の分散が計算できる。

$$\langle \Delta E^2 \rangle = \frac{N_{rev} \langle u^2 \rangle}{4\alpha_E T_0} \quad (4.74)$$

上記の積分実行に際して次の関係を利用した。

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\Delta t\alpha_E} = \int_0^{\infty} e^{-t\alpha_E} dt = \frac{1}{\alpha_E} \quad (4.75)$$



# 中心極限定理が成立する

## → ガウス分布

中心極限定理が成立するならば、電子ビームのエネルギー分布の形はガウス関数である。

$$w(\Delta E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_E} \exp\left(-\frac{\Delta E^2}{2\sigma_E^2}\right) \quad (4.76)$$

そしてそのエネルギー分布の標準偏差は既に求められている。

$$\sigma_E^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta E)^2 w(\Delta E) d(\Delta E) = \langle \Delta E^2 \rangle = \frac{N_{rev} \langle u^2 \rangle}{4\alpha_E T_0} \quad (4.77)$$

平衡エネルギー分布はRF加速の詳細に依存しない



# 仮定の前提が適用できない具体例

この導出の中で中心極限定理の役割は決定的である。もし中心極限定理が成立しないときには、電子ビームのエネルギー分布はガウス型でなくなる。思いつくままにその例を挙げてみよう。

- シンクロトロン振動が非線形なとき。⇒ 大振幅振動時、ビームローディング効果
- 特性時間が設定できないとき。⇒ 放射減衰が非常に速いとき、シンクロトロン振動が非常に遅いとき
- 特性時間内に放出される光子数が充分多くないとき。⇒ 非常に高いエネルギー光子放出、残留ガスやビーム間相互作用による Bremsstrahlung
- 異なる光子放出の間にシンクロトロン位相に関して相関があるとき。⇒ FEL 発振



# 水平方向ベータトロン振動

## 光子放出にともなう

### Courant-Snyder不変量の変化

もはや不変量ではない Courant-Snyder 不変量が、光子の放出前後でどのくらい変化するか見積もる。エネルギー  $u$  の光子放出によって生じる Courant-Snyder 不変量の変動量  $\delta W(u)$  は光子放出点における Twiss パラメーターと運動量分散関数を使って、次のように書ける。

$$\begin{aligned}\delta W(u) &= \beta \left( x' + \frac{u}{E} \eta' \right)^2 + 2\alpha \left( x' + \frac{u}{E} \eta' \right) \left( x + \frac{u}{E} \eta \right) + \gamma \left( x + \frac{u}{E} \eta \right)^2 \\ &\quad - (\beta x'^2 + 2\alpha x x' + \gamma x^2) \\ &= \left( \frac{u}{E} \right)^2 (\beta \eta'^2 + 2\alpha \eta \eta' + \gamma \eta^2) + 2 \frac{u}{E} \{ \beta x' \eta' + \alpha (x \eta' + x' \eta) + \gamma x \eta \}\end{aligned}\tag{4.78}$$

光子放出は確率過程なのでベータトロン位相との相関がない

ここで  $E$  は運動電子のエネルギー。

ベータトロン振動について平均化操作を行うことで、光子エネルギーに関して2次の項が残る。

$$\delta W(u) = \left( \frac{u}{E} \right)^2 (\beta \eta'^2 + 2\alpha \eta \eta' + \gamma \eta^2) \equiv \left( \frac{u}{E} \right)^2 \mathcal{H}(s)\tag{4.79}$$



# 光子スペクトル全域で積分し 全周からの寄与を足し上げる

(4.79) 式に、電子が偏向磁石中を単位角度進行する時に放出する光子数スペクトル密度 (3.111) 式を掛けて、光子全エネルギーに渡って積分する。さらにリング1周の平均を取ることで、光子放出に伴う Courant-Snyder 不変量の変動を表す微分方程式中の励起項が計算される。

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{QE} = \frac{1}{T_0} \oint \int_0^\infty \frac{d\mathcal{F}_{tot}(\omega)}{d\phi} \delta W(\hbar\omega) d\omega \frac{ds}{\rho} \quad (4.80)$$

ここで、光子数スペクトル密度は、リング中の場所毎で偏向磁場強度に依存する量として、次式で与えられている。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}_{tot}(\omega)}{d\phi} &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \alpha \gamma \frac{1}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^\infty K_{5/3}(y) dy \\ &= \frac{4}{9} \alpha \gamma \frac{1}{\omega} S\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \end{aligned} \quad (4.81)$$



# 偏向磁場強度が一定なら

さらに等磁場条件が成立するときは、放射光スペクトルは場所に依存しないため、次のように簡単化される。

$$\frac{d\mathcal{F}_{tot}(\omega)}{d\phi} = \frac{\mathcal{N}_{rev}(\omega)}{2\pi} \quad (4.82)$$

このとき微分方程式の励起項は次のように求められる。

$$\begin{aligned} \left. \frac{dW}{dt} \right|_{QE} &= \frac{1}{T_0} \oint_{mag} \int_0^\infty \frac{\mathcal{N}_{rev}(\omega)}{2\pi} \left( \frac{\hbar\omega}{E} \right)^2 \mathcal{H}(s) d\omega \frac{ds}{\rho} \\ &= \frac{\mathcal{N}_{rev} \langle u^2 \rangle}{T_0 E^2} \oint_{mag} \mathcal{H}(s) \frac{ds}{2\pi\rho} \\ &= \frac{\mathcal{N}_{rev} \langle u^2 \rangle}{T_0 E^2} \langle \mathcal{H}(s) \rangle_{mag} \end{aligned} \quad (4.83)$$

ここで  $\langle \mathcal{H}(s) \rangle_{mag}$  は偏向磁石中での平均を表す。



# 量子励起と放射減衰の釣り合いから Courant-Snyder不変量の平衡値 そして水平エミッタンスが決まる

Courant-Snyder 不変量の平衡値  $W_{Eq.}$  は次に示す量子励起と放射減衰の釣り合い条件から決まる。

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{Tot} = \left. \frac{dW}{dt} \right|_{QE} + \left. \frac{dW}{dt} \right|_{RD} = \left. \frac{dW}{dt} \right|_{QE} - 2\alpha_x W = 0 \quad (4.84)$$

自然エミッタンス  $\varepsilon_x$  は Courant-Snyder 不変量の平衡値  $W_{Eq.}$  から次のように計算される。ここでは、リング中どこでもシンクロトロン放射スペクトルが同じになる様に、等磁場条件を仮定した。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x \equiv \frac{1}{2} W_{Eq.} &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\alpha_x} \left. \frac{dW}{dt} \right|_{QE} = \frac{1}{2} \frac{1}{2\alpha_x} \frac{N_{rev} \langle u^2 \rangle}{T_0 E^2} \langle \mathcal{H}(s) \rangle_{mag} \\ &= \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{\hbar}{m_0 c} \frac{\gamma^2}{J_x \rho} \langle \mathcal{H}(s) \rangle_{mag} \end{aligned} \quad (4.85)$$



# 垂直方向ベータトロン振動 運動量分散関数が0の場合

垂直方向では通常、運動量分散関数がゼロなので、エミッタンス発生元となる物が存在しないように思える。しかし詳細に見れば、放射光自身にも発散角があり、それは前の章で求めたところに依ればおよそ  $1/\gamma$  である。これによる Courant-Snyder 不変量の増加量は (4.79) 式に倣い次式で評価される。

$$\delta W = \left(\frac{u}{E}\right)^2 \beta \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 \quad (4.87)$$

超相対論的電子ではこの値はとても小さい。現実には垂直方向のエミッタンスを決めるのは、磁場誤差から生じる垂直方向運動量分散関数および水平方向との結合である。勿論、垂直方向の偏向磁石がある場合には、その影響は水平方向同様に生じるものである。

**SADではこの効果を見逃している**



# 中心極限定理に関するコメント

## コメント

此処ではシンクロトロン放射によるエミッタンスやエネルギー拡がりの議論をした。しかし、此処の議論は中心極限定理が適用できる物理現象なら幅広く使える。

例えば、電子ビームと残留ガスとの散乱を考えてみよう。通常はビーム寿命を制限する1度の大振幅散乱から要求真空度が決まる。しかしビーム損失にはつながらない小振幅散乱の効果もある。この小振幅多重散乱の効果は基本的にシンクロトロン放射に依る量子励起と同じであり、電子ビームエネルギー幅の増大やエミッタンスの増大を生じる。

さらにバンチ内電子同士のイントラビーム散乱や衝突型加速器のビームビーム間相互作用からも同様な寄与がある。

これらの寄与は、シンクロトロン放射の光子エネルギー分布と異なり、比較的大振幅側に裾野が延びている。このため単一大振幅散乱が大きな影響を持ち易く、中心極限定理の成立条件を脅かし、非ガウス型テイル分布の発生原因になりがちである。



# FODOcell.sadで使った偏向磁石の

## OneTurnDampingMatrixと OneTurnExcitation

### MARKエレメントと1個の偏向磁石で出来たビームライン

```
In[15]:= e=Enittance[Matrix->True];
Unstable transfer matrix
Unstable transfer matrix
In[15]:= OTDM=OneTurnDampingMatrix/.e;
In[15]:= OTDM
Out[15]:= {{-1.1866228298831516e-13,-4.797400164646871e-07,0,0,0,-1.2588325990693538e-07},
{2.6335484597799952e-15,-4.769966498410675e-07,0,0,0,-1.8839339088665662e-07},{0,0,0,-4.824895451680838e-07,0,0},
{0,0,0,-4.824895063684355e-07,0,0},{-5.936302983640214e-15,4.196139170917212e-08,0,0,0,8.248248893586194e-09},
{-6.243871624131755e-08,-6.279780118777618e-08,0,0,0,-9.704712614359462e-07}}
```

$$\text{OTDM} = \begin{pmatrix} -1.18662e-13 & -4.7974e-7 & 0 & 0 & 0 & -1.25883e-7 \\ 2.63355e-15 & -4.76997e-7 & 0 & 0 & 0 & -1.88393e-7 \\ 0 & 0 & 0 & -4.8249e-7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4.8249e-7 & 0 & 0 \\ -5.9363e-15 & 4.19614e-8 & 0 & 0 & 0 & 8.24825e-9 \\ -6.24387e-8 & -6.27978e-8 & 0 & 0 & 0 & -9.70471e-7 \end{pmatrix}$$

```
In[19]:= OTE=OneTurnExcitation/.e;
In[19]:= OTE
Out[19]:= {{2.52039685647927e-15,3.1401806065639305e-15,0,0,-1.8352383890819205e-16,1.612118658359922e-14},
{3.1401806065639305e-15,4.177330472819123e-15,0,0,-2.193979829936753e-16,2.4126345790201605e-14},{0,0,0,0,0,0},
{-1.8352383890819205e-16,-2.193979829936753e-16,0,0,1.374828190275136e-17,-1.0562950496348112e-15},
{1.612118658359922e-14,2.4126345790201605e-14,0,0,-1.0562950496348112e-15,1.853680783441111e-13}}
```

$$\text{OTE} = \begin{pmatrix} 2.5204e-15 & 3.14018e-15 & 0 & 0 & -1.83524e-16 & 1.61212e-14 \\ 3.14018e-15 & 4.17733e-15 & 0 & 0 & -2.19398e-16 & 2.41263e-14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.83524e-16 & -2.19398e-16 & 0 & 0 & 1.37483e-17 & -1.0563e-15 \\ 1.61212e-14 & 2.41263e-14 & 0 & 0 & -1.0563e-15 & 1.85368e-13 \end{pmatrix}$$



# 参考文献

- 鎌田進「ビーム物理学入門」(未完成テキスト)

今日の話の全ての数式展開が(馬鹿)丁寧に日本語で書いてある。

- M. Sands "The Physics of Electron Storage Rings, An Introduction" SLAC-R-121. (1970).

<http://www.slac.stanford.edu/pubs/slacreports/slac-r-121.html>

素人(高エネルギー実験家)向けに分かり易く書かれた電子陽電子円形コライダーの入門書。あらかたのことに触れているので、玄人(加速器専門家)も安易に引用する傾向にある。

- K.-J. Kim, "Characteristics of Synchrotron Radiation," AIP Conference Proceedings, 184, 565 (AIP, 1989).

シンクロトロン放射について、基礎原理(Maxwell方程式)から始めてアンジュレータ放射まで、きちんと書かれたテキスト。残念なことに、これも未完。