

SADの基礎(2)



25 May 2011

K. Oide (KEK)

前回のまとめ

- 古典力学的な運動はハミルトンの運動方程式で記述される。
- ハミルトニアンに基づく運動では正準交換関係が保存する。
- その結果、少なくとも小振幅の場合は、位相空間の広がり(エミッタンス)が各自由度毎に保存する。
- ハミルトニアンに基づく運動の転送行列(Jacobian)はSymplectic行列である。
- 転送行列はTwissパラメータで記述でき、それにより「基準座標」が定義できる。
- すべての(線形な)力学的運動は「基準座標」では円運動になる。

正準交換関係

- ポアソン括弧式:

$$[f, g] = \sum_{i=1,3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i1}} \frac{\partial g}{\partial p_{i1}} - \frac{\partial g}{\partial x_{i1}} \frac{\partial f}{\partial p_{i1}} \right)$$

$$x_{i1} = (x, y, t)_1, \quad p_{i1} = (p_x, p_y, p_t)_1$$

微分する変数はとりあえず入り口の変数を使っておくが、いずれどの場所の変数でも変わらないことが示される。

- このとき任意の s の x_i, p_i に対し、以下の交換関係が常に成り立つ:

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0, \quad [x_i, p_j] = -[p_j, x_i] = \delta_{ij}$$

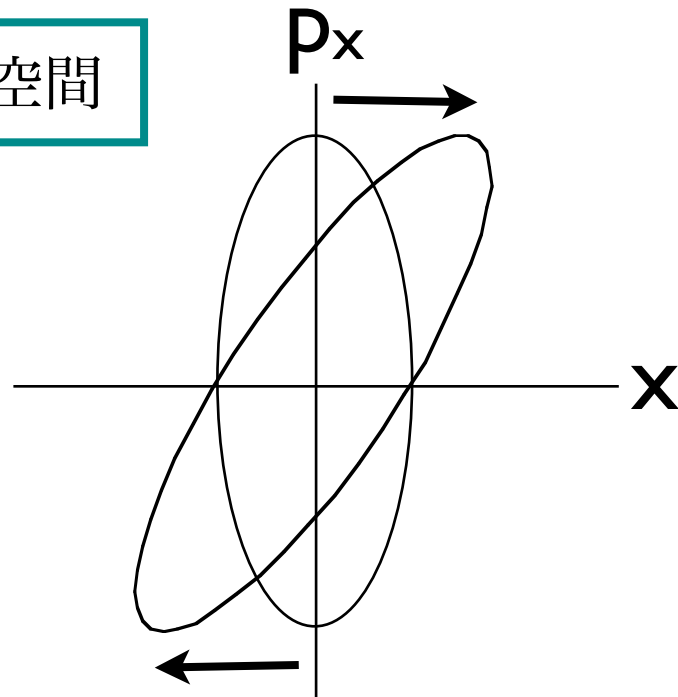
- 交換関係はヤコビ行列(転送行列) $M = \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_{j1}} \right)$, $q \equiv (x, p_x, y, p_y, t, p_t)$ を使って

$${}^t M J M = J, \quad J \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

と表される。

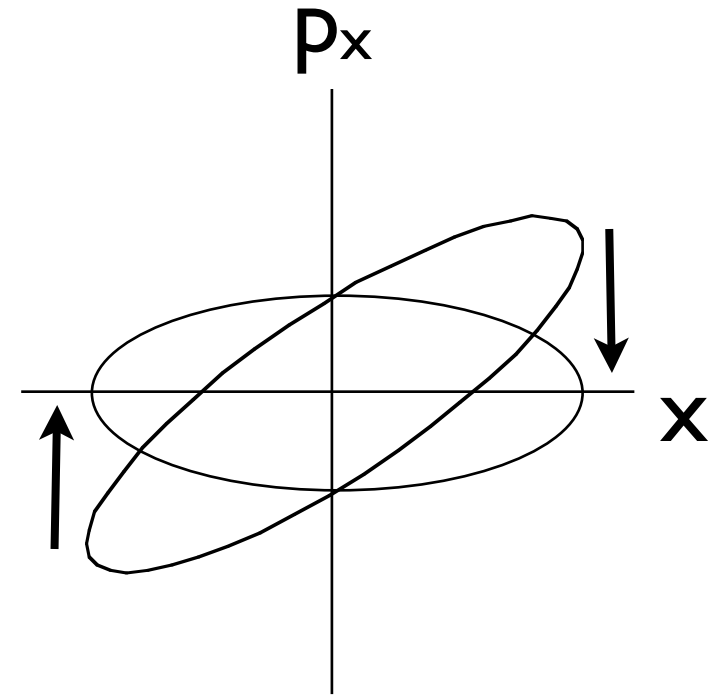
エミッタンスの保存

位相空間



自由空間でのドリフト

$$x_1 \approx x_0 + (p_{x0}/p_0)\ell$$



レンズでの収束

$$p_{x1} \approx p_{x0} - kx_0$$

- ドリフトもレンズによる収束も、位相空間内ではビーム内で片方の軸に平行なずれを起こすだけなので、ビームが占める位相空間の大きさ(面積)は不変である。
- ビームの静止系で考えれば、加速によってもエミッタンスが変わらないことがわかる。
- ビームサイズや運動量の広がり(温度)は、エミッタンスを保存するという条件の下で、収束系で変化させることができる。

エミッタンスはエントロピーだ

古典力学に近いばあいには、位相空間の任意の領域の体積とそれに《相応する》量子状態の数の間に一定の対応をもうけることができる。すなわち、おのこの量子状態に位相空間の体積 $(2\pi\hbar)^s$ の《細胞》が《相応する》。したがって準古典的なばあいには $\Delta\Gamma$ は

$$\Delta\Gamma = \frac{\Delta p \Delta q}{(2\pi\hbar)^s} \quad (7.6)$$

の形に書かれることがわかる。ただし s はあたえられた部分系の自由度である。この公式が $\Delta\Gamma$ と $\Delta p \Delta q$ との間の求める対応を表わしている。

$\Delta\Gamma$ なる量は部分系の巨視的状態の統計的重みとよばれ、その対数

$$S = \ln \Delta\Gamma \quad (7.7)$$

は部分系のエントロピーとよばれる。古典論のばあいにはエントロピーは上式に対応して

$$S = \ln \frac{\Delta p \Delta q}{(2\pi\hbar)^s} \quad (7.8)$$

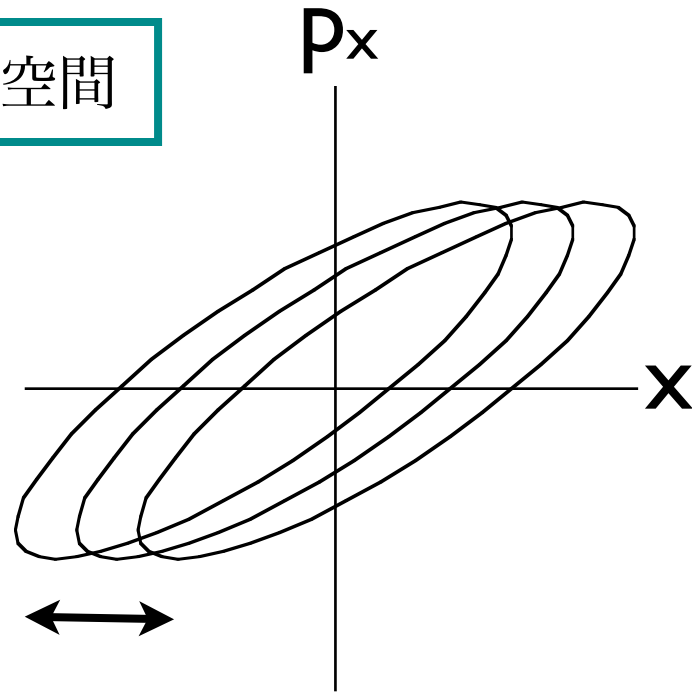
で定義される。このようにして定義されたエントロピーは、統計的重みそのものと同様、次元のない量である。状態の数 $\Delta\Gamma$ はどんなばあいでも 1 より小さいことはないから、エントロピーは負にはなりえない。エントロピーの概念は統計において最も重要なものの一つである。

エミッタンス

- エミッタンスの保存は、運動がなんらかのハミルトニアンで表される系(保存系)の、局所的な位相空間で常に成り立つ。
- 電磁場によるビームの収束、加速等はこのような系である。電磁場は一定である必要はなく、場所・時間の関数であってかまわない。
- エミッタンスの保存は各自由度毎に成り立つ。この点、Liouvilleの定理(全位相空間の体積の保存)よりも強い。
- 実は保存系では、より強い保存則(正準交換関係の保存)が成り立っており、エミッタンスの保存はその帰結である。

エミッタンスの増大

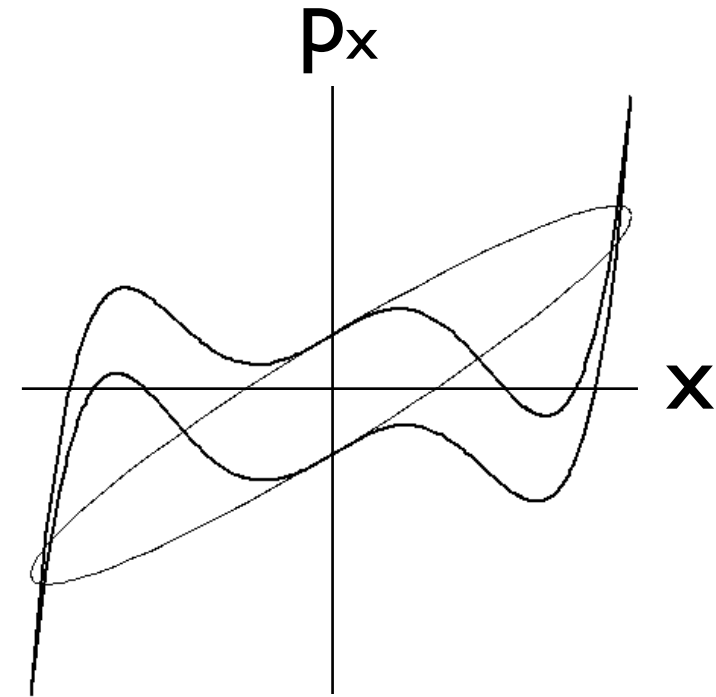
位相空間



他の自由度(例えばエネルギー)

による軌道の違い

$$x = x_{\beta} + \eta\delta$$



非線形レンズでの収束

$$p_{x1} = p_{x0} + \sum_n k_n x^n$$

- 他自由度間の混合、非線形レンズの作用などで、エミッタンスの事実上の増大が起こる。
- 粒子の散乱や放射により、エミッタンスの減少または増大がおこる。
- また、一様でない(あるいは自由度が2以上の)非線形系に特有なカオス・拡散現象によるエミッタンス増大が起こる。

ビームのサイズ、温度、エミッタンス

KEKB HER @ IP

垂直方向 $2 \mu\text{m}$, 160億度

$$\varepsilon_y/mc = 5.6 \times 10^{-6} \text{ m}$$

水平方向 $100 \mu\text{m}$, 110億度

$$\varepsilon_x/mc = 2.8 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$N = 5 \times 10^{10}$$

進行方向 94 m , 1500度

$$\varepsilon_z/mc = 6.6 \times 10^{-2} \text{ m}$$

- 自由度毎に温度とエミッタンスは異なる。
- 普通、縦方向(進行方向)は横方向に比べて温度は低いがエミッタンスは大きい。

ERL @ Gun

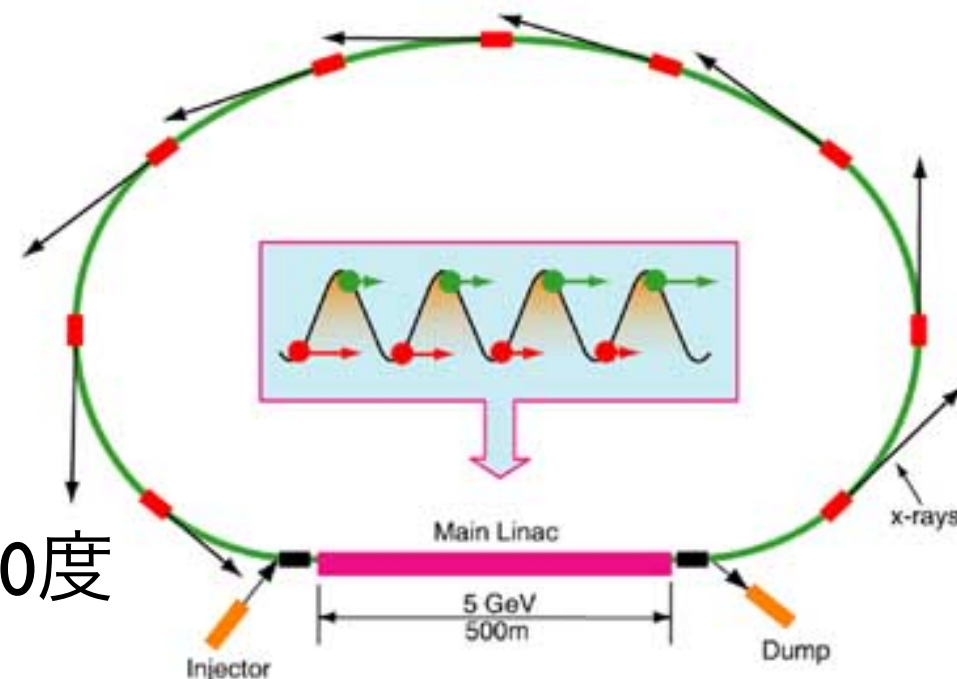
横方向 1 mm , 5000度

$$\varepsilon_{x,y}/mc = 1 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$N = 6 \times 10^8$$

進行方向 1 mm , 2800度

$$\varepsilon_z/mc = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$$



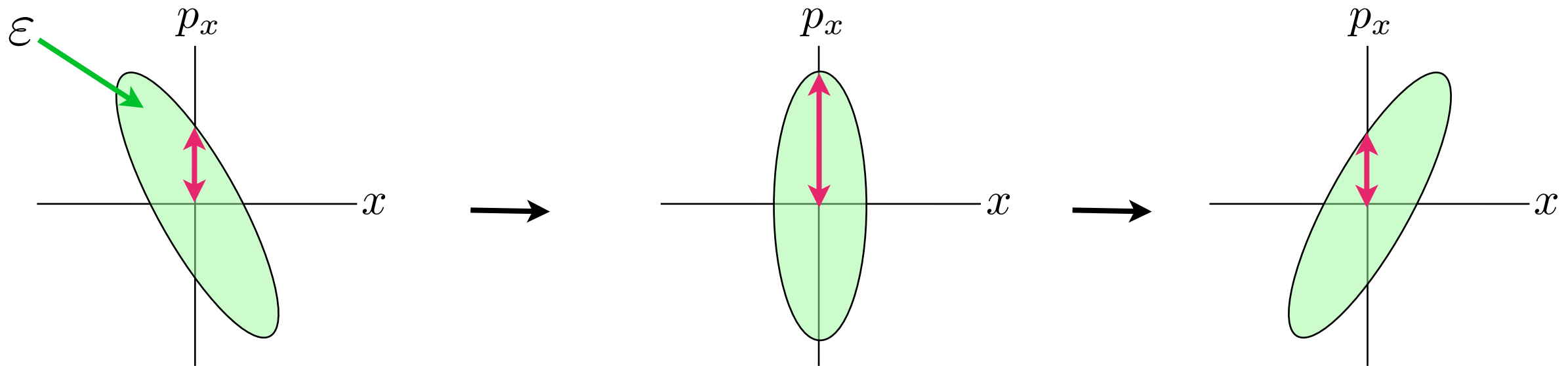
ビームの熱力学

エミッタンス: $\varepsilon^2 = \langle x^2 \rangle \langle p_x^2 \rangle - \langle xp_x \rangle^2$

エントロピー: $dS = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$

温度: $T = \frac{\varepsilon^2}{2m \langle x^2 \rangle}$

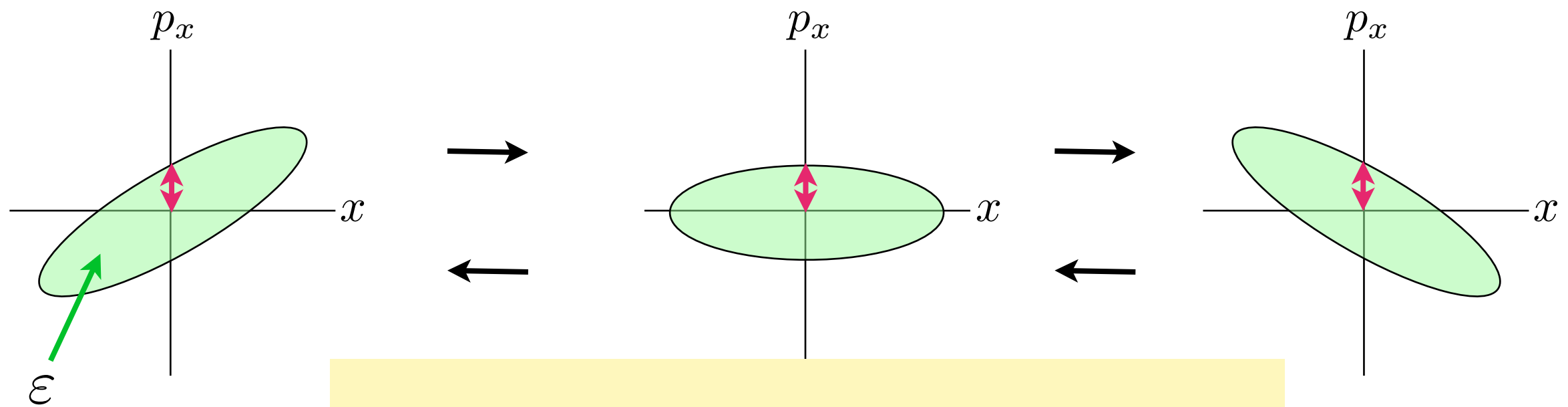
- 自由空間: ビームは外力を受けず膨張・収縮する。



- エミッタンス(エントロピー)は不変。
- 温度(↕の二乗に比例)は減少・増大。

ビームの熱力学(2)

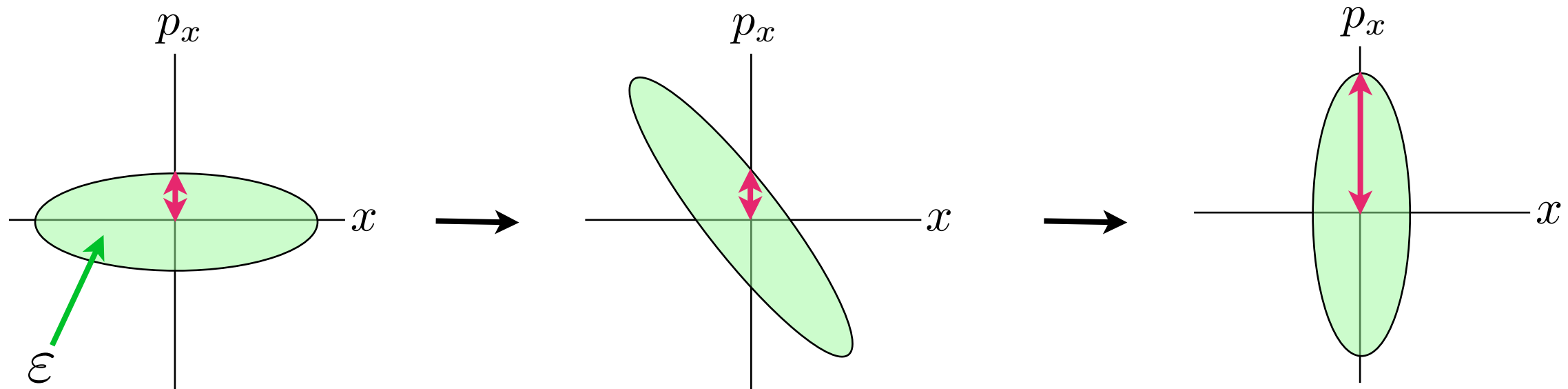
- 収束(発散)レンズ: ビームサイズは不変、内部エネルギーが変化。



- エミッタンス(エントロピー)は不変。
- 温度(↑の二乗に比例)も不変。

ビームの熱力学(3)

- 収束レンズと自由空間の組み合わせ:

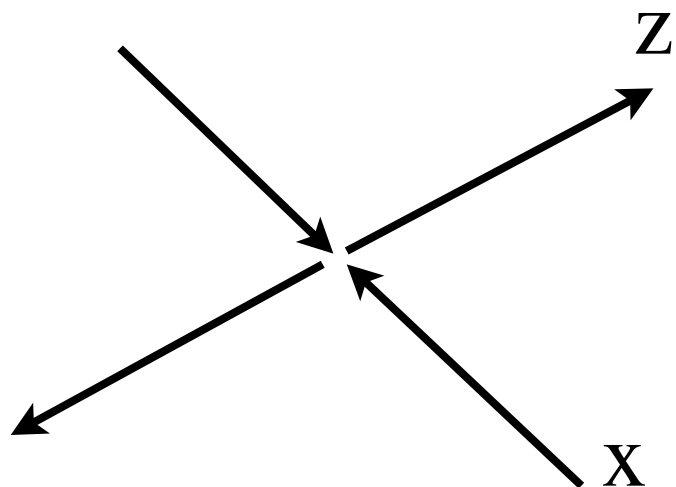


- エミッタンス(エントロピー)は不変。
- ビームサイズは縮小。
- 温度(↕の二乗に比例)は増大。
- 内部エネルギーは増加。
- 収束レンズの磁場の圧力で断熱収縮。

$$dE = TdS - pdV$$

温度差による自由度間の熱の流れ

- intrabeam scattering -



- ビーム内の粒子同士が衝突すると、温度の高い自由度(普通は横方向)から温度の低い自由度(普通は縦方向)に熱が流れる。

$$\frac{\Delta \langle w_1^2 \rangle}{\Delta t} = c_I [(g_2 - g_1) + (g_3 - g_1)]$$

$$\frac{\Delta \langle w_2^2 \rangle}{\Delta t} = c_I [(g_1 - g_2) + (g_3 - g_2)]$$

$$\frac{\Delta \langle w_3^2 \rangle}{\Delta t} = c_I [(g_1 - g_3) + (g_2 - g_3)]$$

$$g_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{2u_1 \sin^2 s \cos s ds}{\sqrt{(\sin^2 s + \frac{u_1}{u_2} \cos^2 s)(\sin^2 s + \frac{u_1}{u_3} \cos^2 s)}}$$

$$g_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{2u_2 \sin^2 s \cos s ds}{\sqrt{(\sin^2 s + \frac{u_2}{u_1} \cos^2 s)(\sin^2 s + \frac{u_2}{u_3} \cos^2 s)}}$$

$$g_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{2u_3 \sin^2 s \cos s ds}{\sqrt{(\sin^2 s + \frac{u_3}{u_1} \cos^2 s)(\sin^2 s + \frac{u_3}{u_2} \cos^2 s)}}$$

g_1, g_2, g_3 : 実効温度

- 全体のエントロピーは増大する。

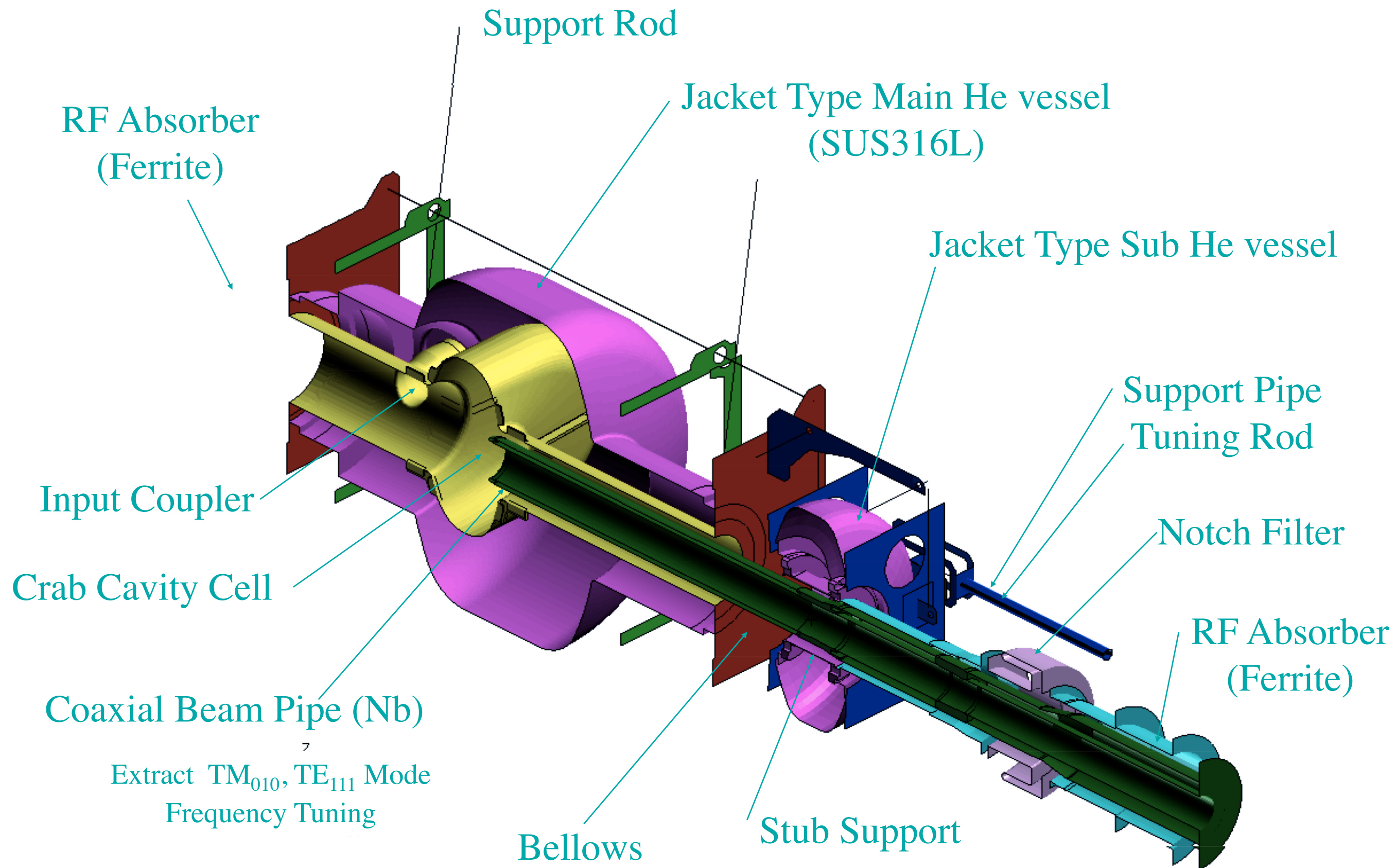
$T_2 > T_1$ で

$$dS_1 + dS_2 = \frac{dq}{T_1} - \frac{dq}{T_2} = dq \frac{(T_2 - T_1)}{T_1 T_2} > 0$$

e.g. K. Kubo and K. Oide, Phys. Rev. ST Accel. Beams 4, 124401 (2001)

超伝導クラブ空洞(世界初)

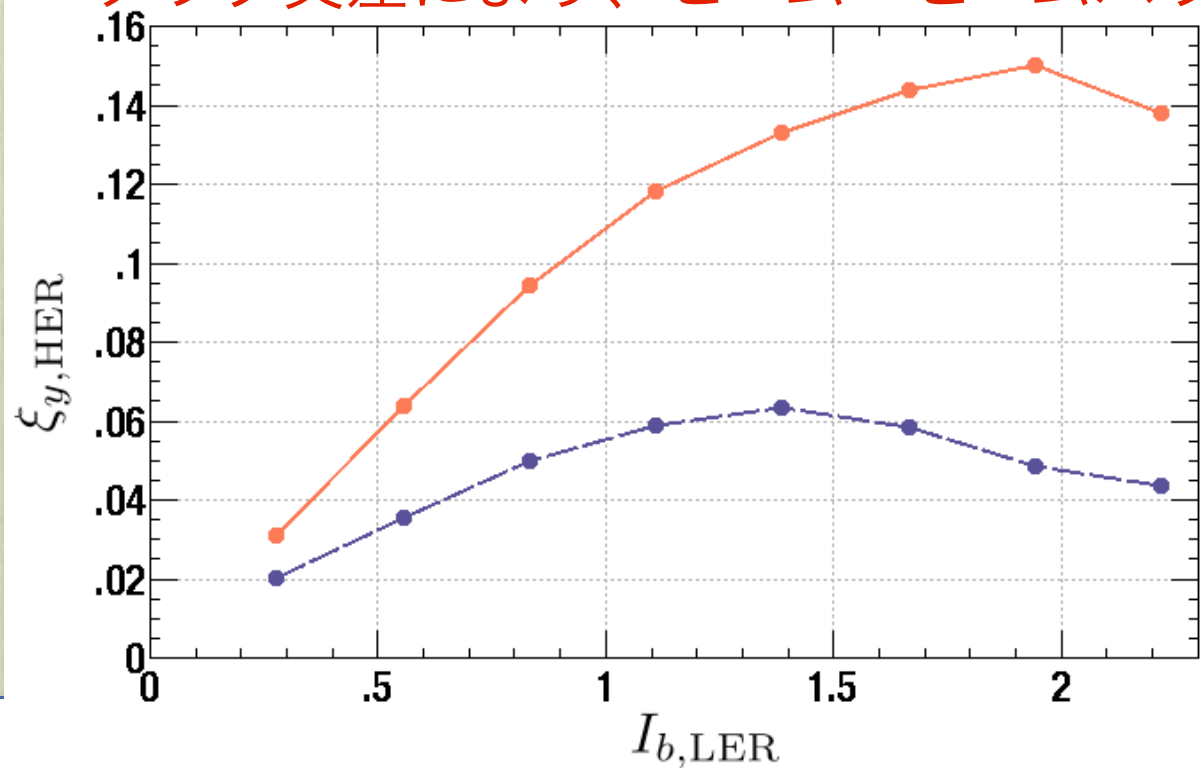
K. Akai, K. Hosoyama et al



クラブ交差 @ KEKB

●クラブ交差により、ビーム・ビームパラメータは最大0.25に上昇可能!

K. Ohmi

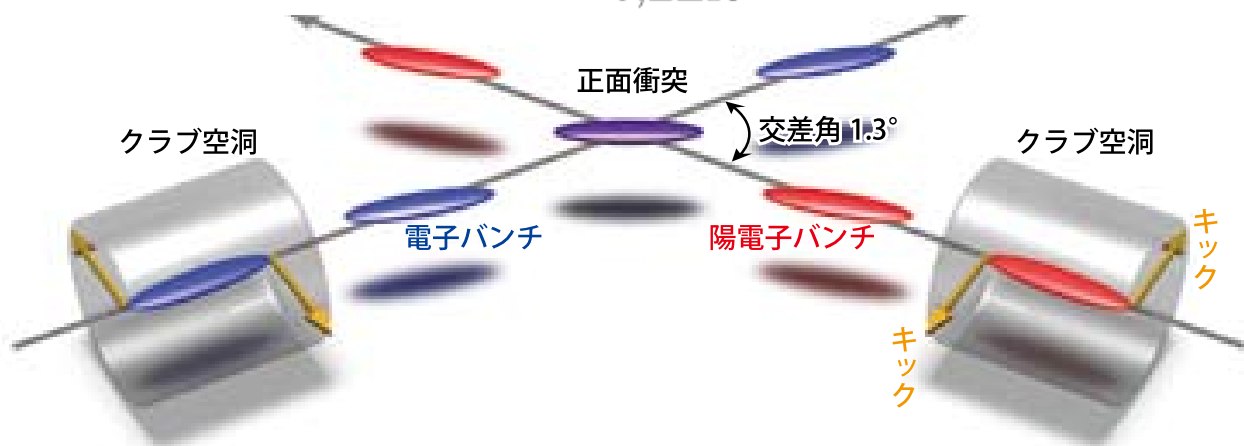


正面衝突(クラブ交差)

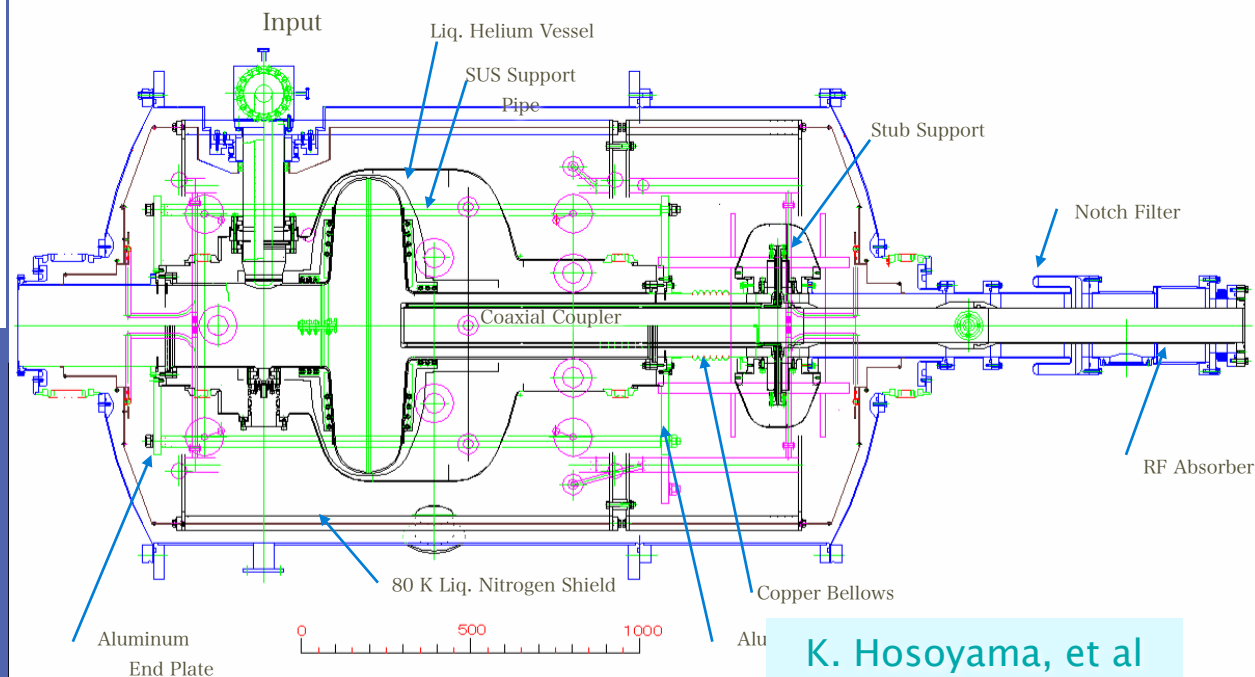
(Strong-strong simulation)

交差角22 mrad

(at the optimum tune)



●超伝導クラブ空洞は完成し、現在 KEKBでビームテストに成功。



K. Hosoyama, et al

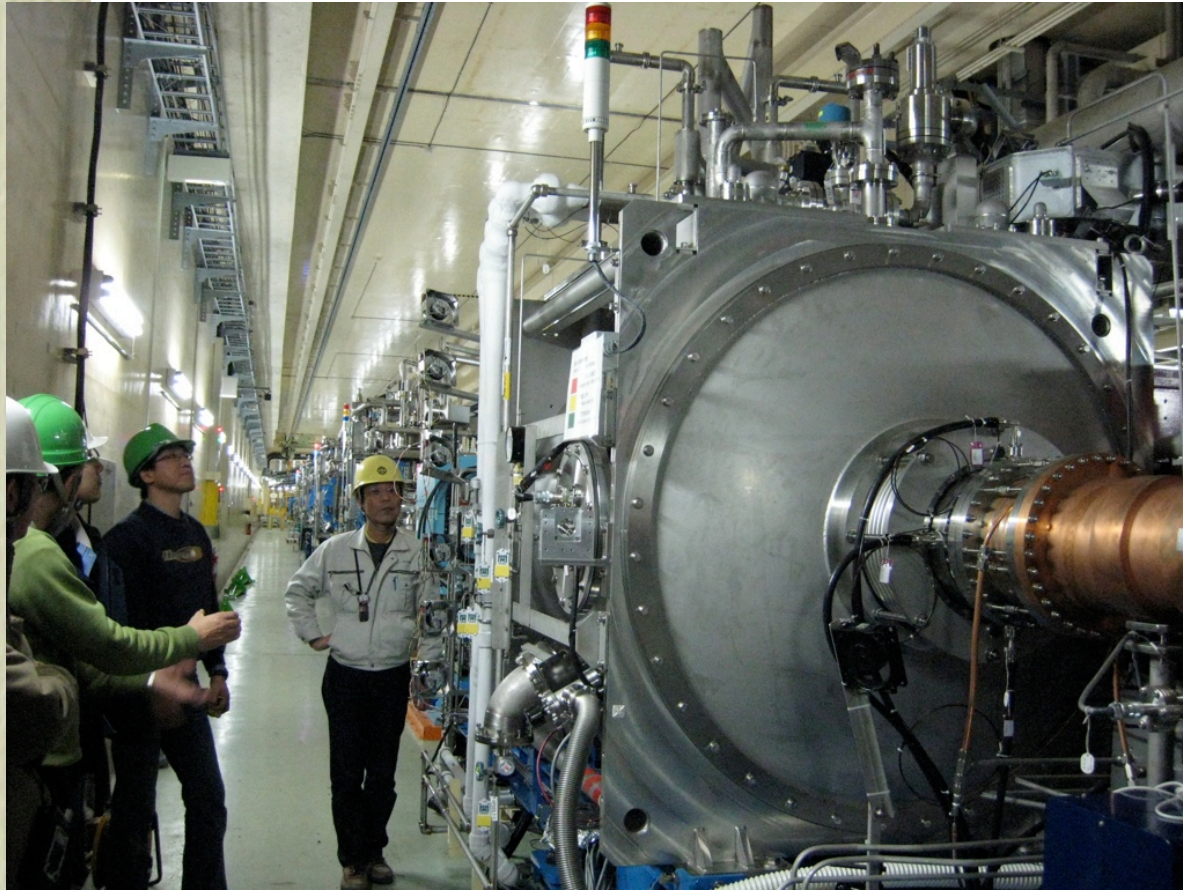
衝突点で
軌道に交差角があっても、
ビームは正面衝突になる!

さらに高いルミノシティに挑戦!



従来の衝突

2007年1月、世界初のクラブ空洞がKEKB に各リング1台ずつ装着



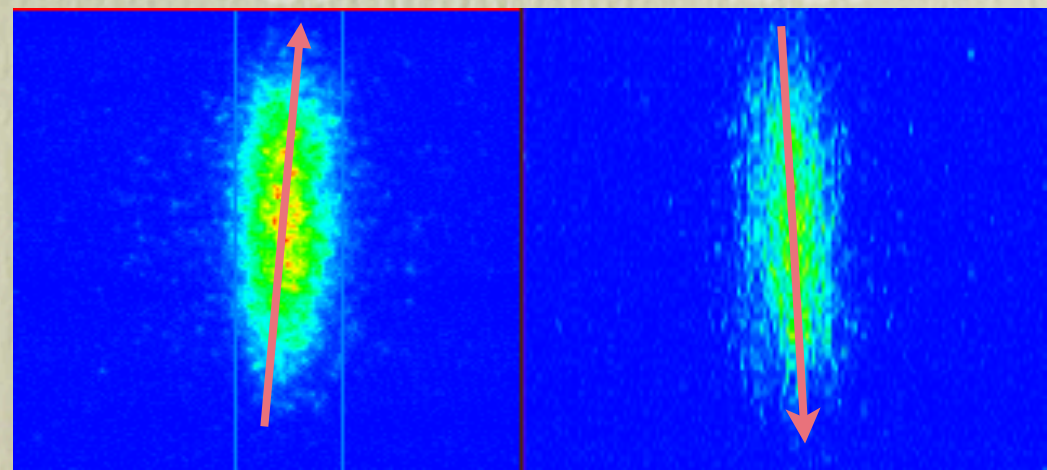
HER (e^- , 8 GeV)



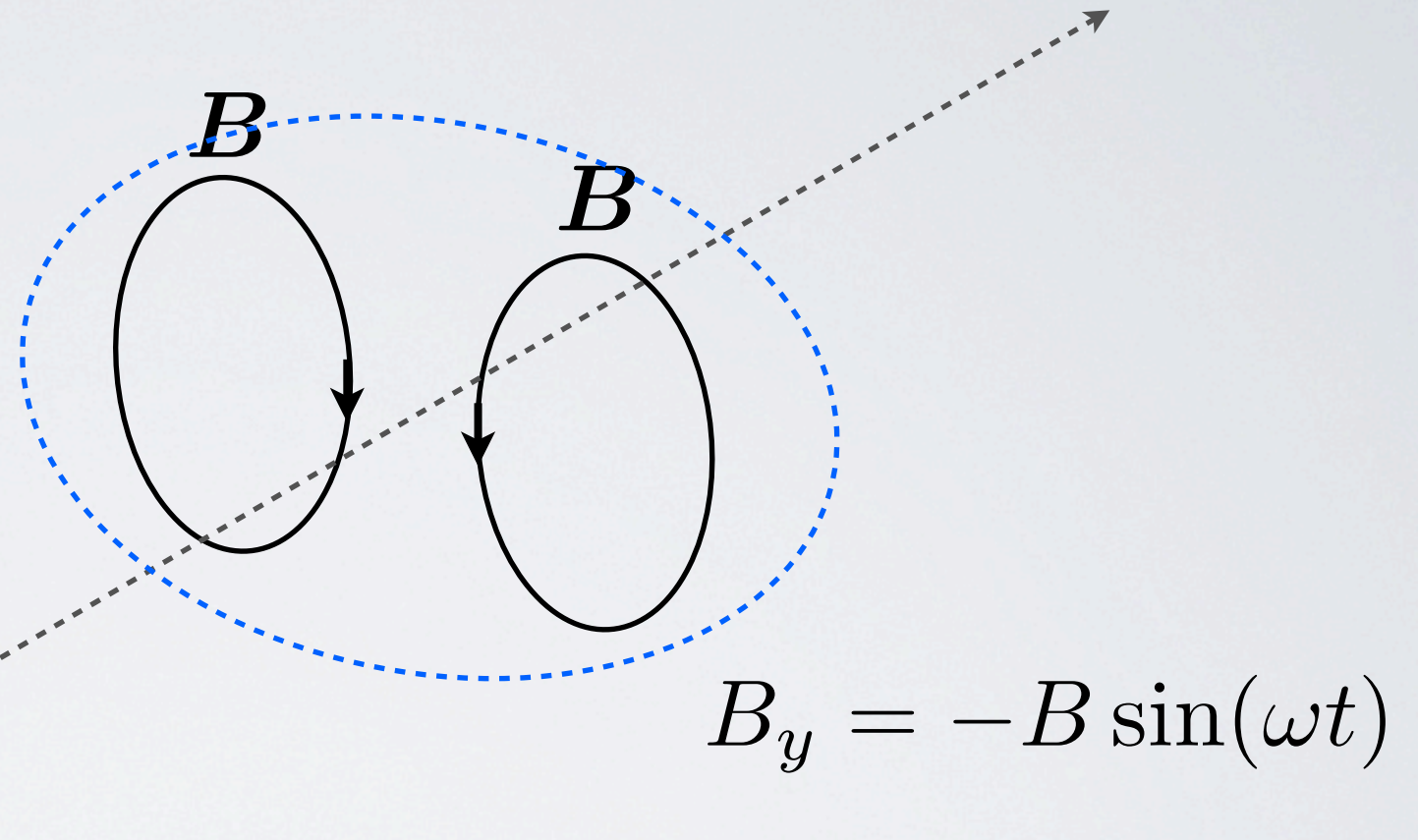
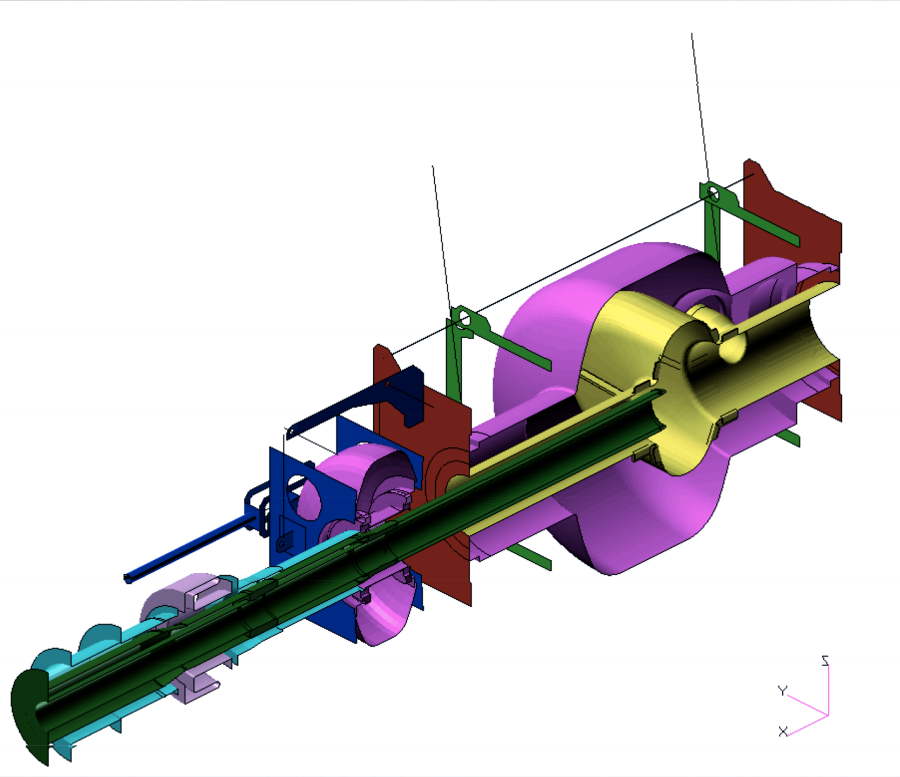
LER (e^+ , 3.5 GeV)

電子

陽電子



クラブ空洞の原理



ビームが $t = 0$ で crab cavity を通過するとする。

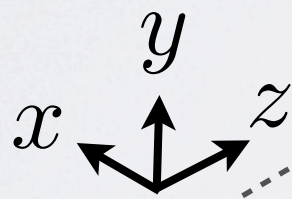
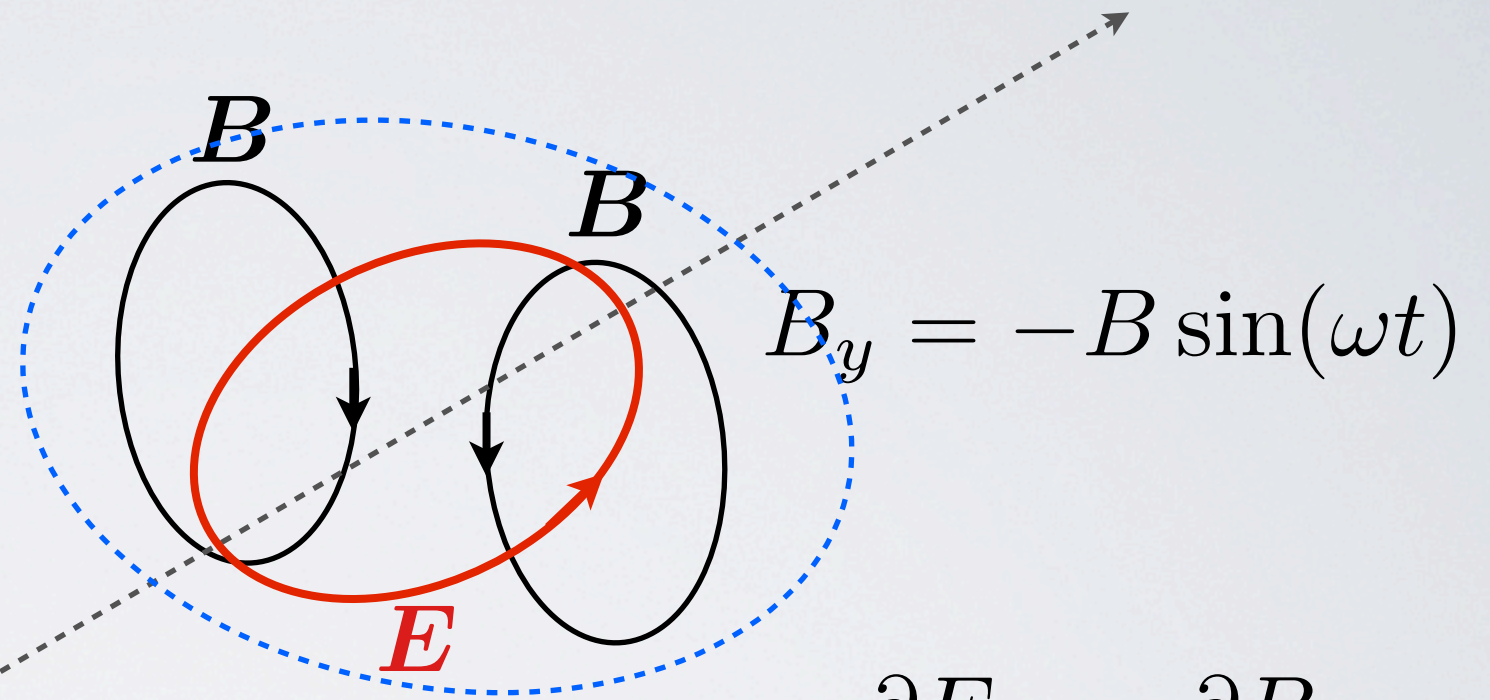
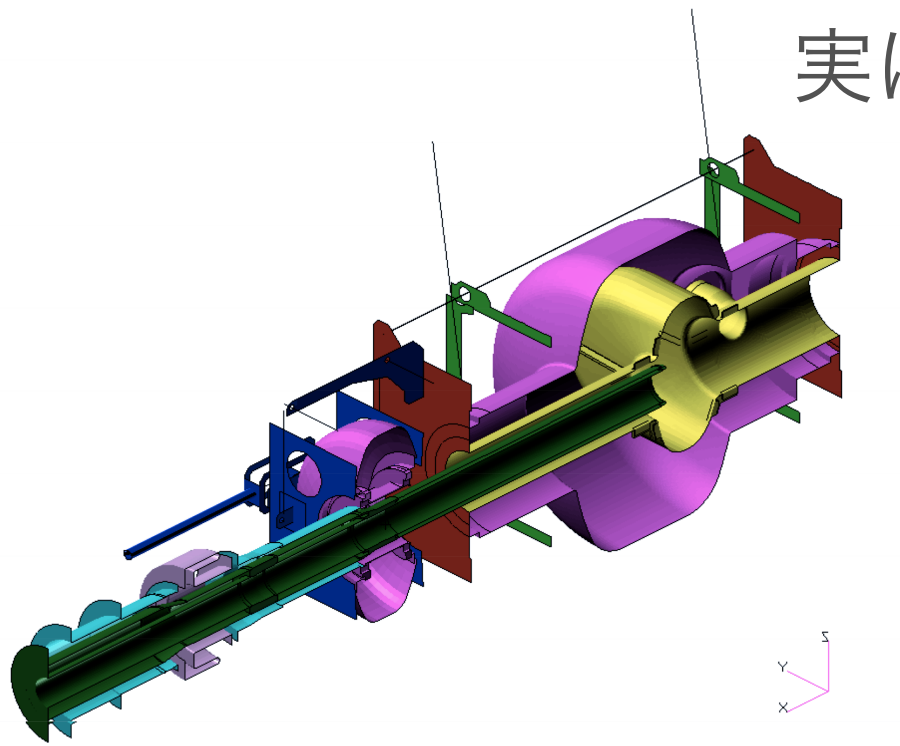
$$\Delta p_x = -ev_z B_y \Delta t \approx eB \sin(\omega t) c \Delta t \approx eB t \omega l$$

($l \equiv c \Delta t$: cavity の長さ)

ビームの前後で横向き運動量の変化が得られる。

クラブ空洞の原理(2)

実は横向きの変位だけでは済まない。



$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t},$$

$$E_z = -\omega B x \cos(\omega t)$$

$$\Delta p_x = e B t \omega l$$

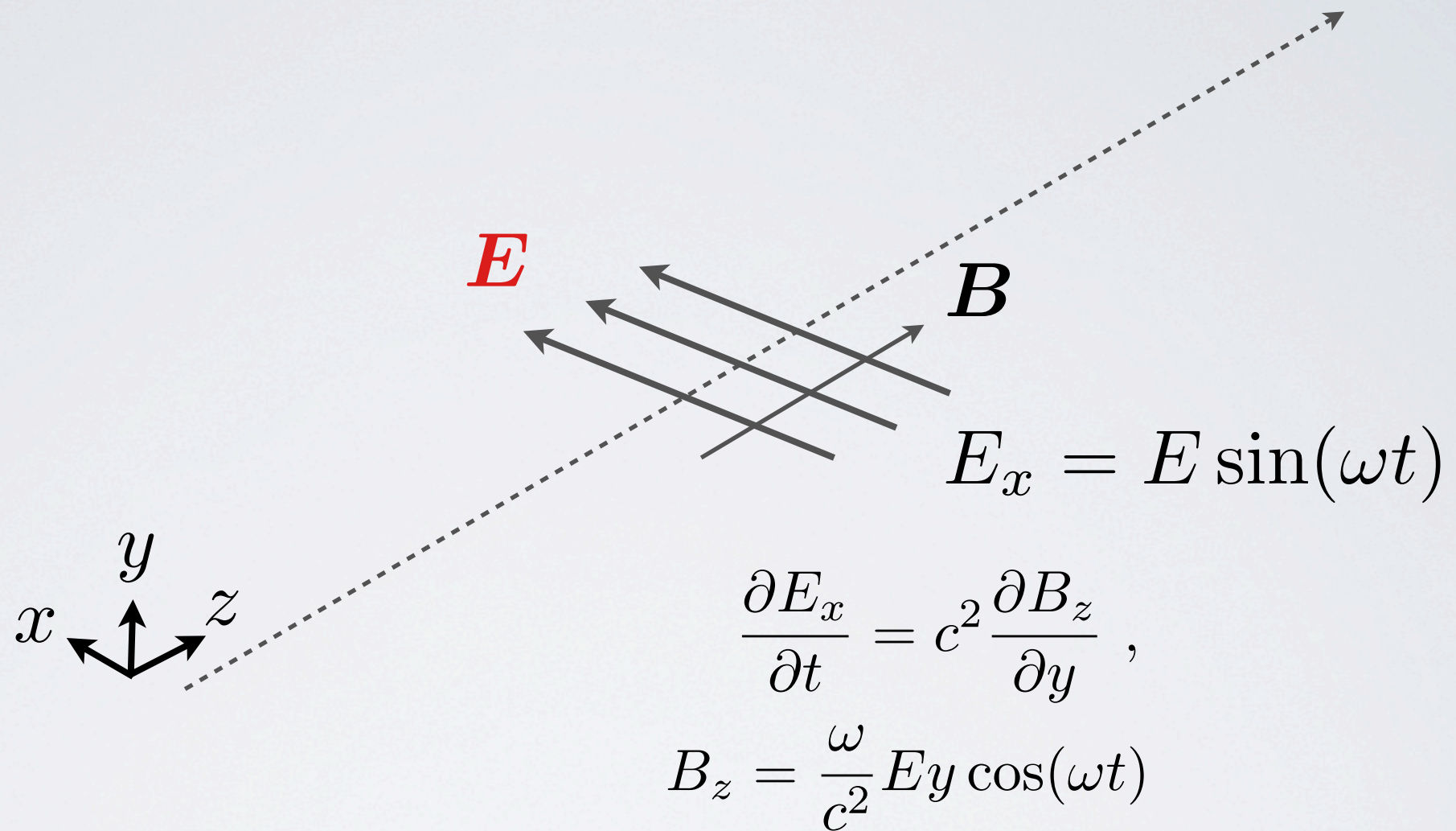
$$\Delta E = e E_z l = -e B x \omega l$$

ビームの横方向の変位に比例したエネルギーの変化が起こる。

実際このようなエネルギーの変化は、クラブ空洞を通過するビーム軌道を変化させる時の反射波で検出されている。

クラブ空洞の原理(3)

では、磁場の代わりに電場で横向きに蹴った場合は?

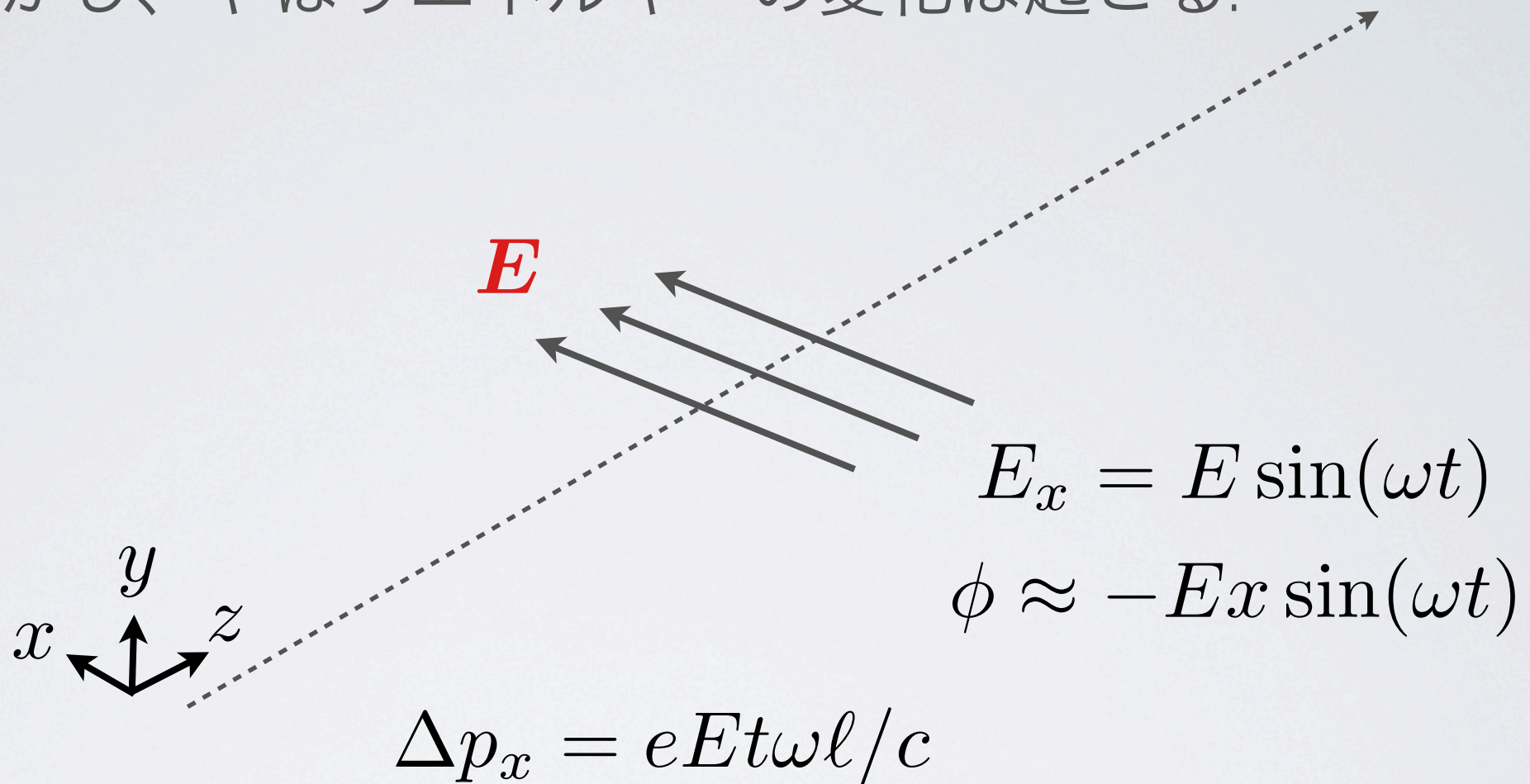


$$\Delta p_x = eE_x l / c \approx eEt\omega l / c$$

磁場は少なくともエネルギーは変えない。

クラブ空洞の原理(4)

しかし、やはりエネルギーの変化は起こる!



粒子は空洞に $t = -l/2c$ に入射し、 $t = +l/2c$ に出射する。

空洞の外のポテンシャルを φ_0 とすると、入射時に $e\varphi(-l/2c) - e\varphi_0$ 、出射時に $e\varphi_0 - e\varphi(-l/2c)$ のエネルギーの変化が起こる。

$$\Delta E = -e\phi(-l/2c) + e\phi(l/2c) \approx -eEx\omega l / c$$

クラブ空洞の原理(5)

磁場の場合

$$\Delta p_x = eBt\omega l$$
$$\Delta E = -eBx\omega l$$

電場の場合

$$\Delta p_x = eEt\omega l/c$$
$$\Delta E = -eEx\omega l/c$$

両者は $E = cB$ とすれば同じ関係式である。

横方向の運動量の変化と全エネルギーの変化の間には、具体的な方法に依存しない、何か一般的な関係があるのではないか?

クラブ空洞の原理(6)

運動量とエネルギーの変化は、ある関数 $G(x, t)$ により、
以下のように表される：

$$\Delta p_x = kt = -\frac{\partial G}{\partial x}$$

$$\Delta E = -kx = \frac{\partial G}{\partial t}$$

$$G = -kxt$$

Hamiltonの運動方程式の帰結

クラブ空洞の原理(7)

- Hamiltonの運動方程式

$$(x, y, t)' = \frac{\partial H}{\partial(p_x, p_y, p_t)}, \quad (p_x, p_y, p_t)' = -\frac{\partial H}{\partial(x, y, t)}$$

において、

$$H = G\delta(s - s_0) = -kxt\delta(s - s_0)$$

であれば、クラブ空洞の変換

$$\Delta p_x = kt = -\frac{\partial G}{\partial x}$$

$$\Delta E = -\Delta p_t = -kx = \frac{\partial G}{\partial t}$$

がまさに実現する。磁場クラブ空洞の場合は

$$eA_s = kxt\delta(s - s_0)$$

である。

Hamiltonの運動方程式(5)

- 以上のように、Hamiltonの運動方程式、あるいはHamiltonianを使うことにより、直感的には思いつかないような、隠れた依存性・付随的な運動が得られる。
- このようなHamiltonianに従った、付随的な運動は一見大きさが小さかったりして、無視しても構わないように見える場合がある。
- しかし、特にストレージ・リングのように、非常に周回数の多いビームでは、このような僅かな誤差が重大な結果の違いを導く。
- したがって、加速器の世界ではHamiltonianから逸脱した議論をすることは、きわめて危険であり、もしそうすれば激しい非難を浴びて、結果は信用されない。

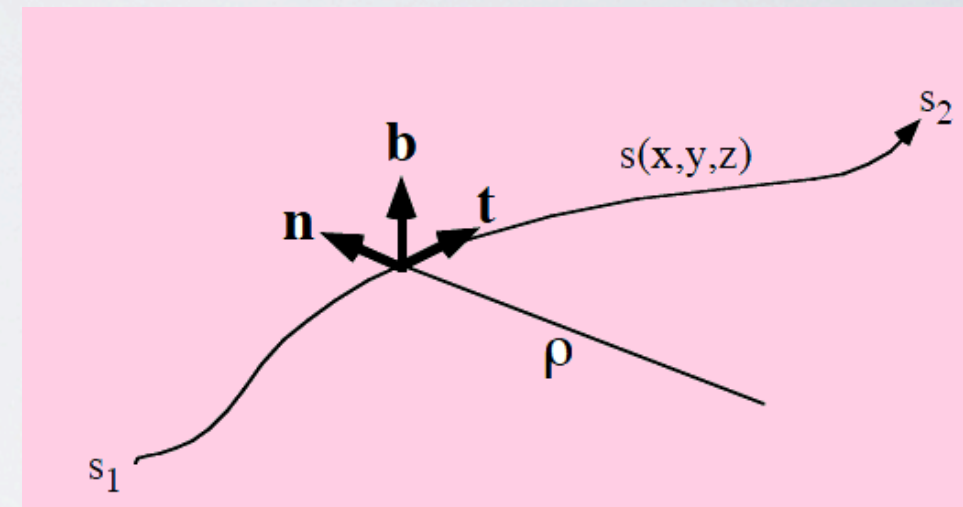
座標系

- ・ 当然のことながら、**物理現象は座標系に依存しない**。
- ・ 座標系は**現象が記述しやすいように選べばよい**。
- ・ 一つの選び方はある曲線 $\mathbf{s} = \mathbf{s}(x, y, z)$ に沿って粒子の位置ベクトル \mathbf{u} を

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} + x\mathbf{n} + y\mathbf{b}$$

\mathbf{n} : 法線、 \mathbf{b} : 陪法線

のように表す方法である。



- ・ この曲線は実際のある粒子の軌道そのものであってもよいし、**そうでもなくてもよい**。粒子の軌道が複雑な場合は、それに沿った座標は面倒なだけである。
- ・ 途中で適当に座標変換をしてもよい。

独立変数

- 独立変数としては時間 t の代わりに、曲線 s に沿った長さ s を用いることが多い。
- これは、ビームラインの要素が s によって (近似的に) 区分されていて、 s を独立変数とすることで取り扱いが便利になることが多いからである。
- s でなく、例えば時刻 t を独立変数とすると、どの時刻からが各要素の始まり・終わりであるかがあらかじめわからず、また軌道によっても異なるため、不便・困難。
- また、大抵の場合、粒子はビームラインを一方向に通るので、 s を独立変数としても問題ない。
- 時刻 t は従属変数となり、各粒子が場所 s を通過する時刻 $t(s)$ を表す。

Hamiltonの運動方程式

- 電磁場や重力のもとでの粒子の運動は Hamilton の運動方程式に従う。

- 最小作用の原理 (独立変数 t):

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} + x\mathbf{n} + y\mathbf{b}$$

$$\delta \int \left(-mc^2 \sqrt{1 - (d\mathbf{u}/cdt)^2} + e \{ \mathbf{A} \cdot (d\mathbf{u}/dt) - \varphi \} \right) dt = 0$$

- 独立変数を s に替える (ダッシュは s での微分):

$$\delta \int \left(-mc \sqrt{c^2 t'^2 - \mathbf{u}'^2} + e \{ \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}' - \varphi t' \} \right) ds = 0$$

- ラグランジアン:

$$L = -mc \sqrt{c^2 t'^2 - \mathbf{u}'^2} + e(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}' - \varphi t')$$

Hamiltonの運動方程式(2)

- 座標ベクトルの微分関係:

捩率半径

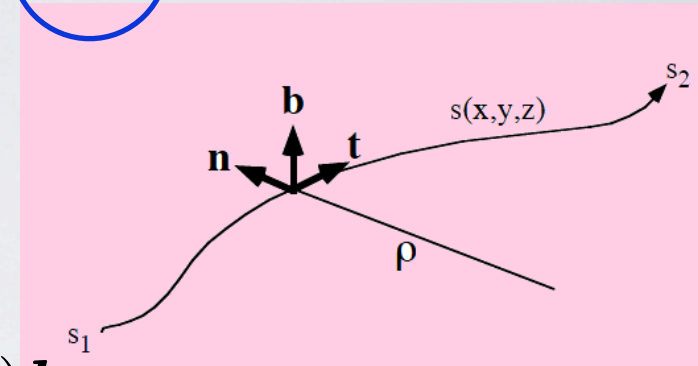
$$s' = t, \quad t' = -n/\rho, \quad n' = t/\rho + b/\tau, \quad b' = -n/\tau$$

曲率半径

- 速度ベクトル:

$$\mathbf{u}' = (1 + x/\rho)\mathbf{t} + (x' - y/\tau)\mathbf{n} + (y' + x/\tau)\mathbf{b}$$

$$\mathbf{u} = s + xn + yb$$



- ラグランジアンを書き直す:

$$\begin{aligned} L &= -mc\sqrt{c^2t'^2 - \mathbf{u}'^2} + e(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}' - \varphi t') \\ &= -mc\sqrt{c^2t'^2 - (1 + x/\rho)^2 - (x' - y/\tau)^2 - (y' + x/\tau)^2} \\ &\quad + e\{(1 + x/\rho)A_s + (x' - y/\tau)A_x + (y' + x/\tau)A_y - t'\varphi\} \end{aligned}$$

Hamiltonの運動方程式(3)

・ 正準運動量:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{mc(x' - y/\tau)}{\sqrt{c^2 t'^2 - (1+x/\rho)^2 - (x' - y/\tau)^2 - (y' + x/\tau)^2}} + eA_x$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{mc(y' + x/\tau)}{\sqrt{c^2 t'^2 - (1+x/\rho)^2 - (x' - y/\tau)^2 - (y' + x/\tau)^2}} + eA_y$$

$$p_t = \frac{\partial L}{\partial t'} = \frac{-mc^3 t'}{\sqrt{c^2 t'^2 - (1+x/\rho)^2 - (x' - y/\tau)^2 - (y' + x/\tau)^2}} - e\varphi$$

・ ハミルトニアン:

$$H = x' p_x + y' p_y + t' p_t - L$$

$$= -(1+x/\rho) \sqrt{(p_t + e\varphi)^2/c^2 - m^2 c^2 - (p_x - eA_x)^2 - (p_y - eA_y)^2} \\ - e(1+x/\rho)A_s - (xp_y - yp_x)/\tau$$

・ ハミルトンの運動方程式:

$$(x, y, t)' = \frac{\partial H}{\partial(p_x, p_y, p_t)}, \quad (p_x, p_y, p_t)' = -\frac{\partial H}{\partial(x, y, t)}$$

Hamiltonの運動方程式(4)

- ・ 正準運動量 p_t は何か？ (以下、 $\rho, \tau \rightarrow \infty$ とする)

$$p_t = \frac{\partial L}{\partial t'} = \frac{-mc^3 t'}{\sqrt{c^2 t'^2 - 1 - x'^2 - y'^2}} - e\varphi ,$$
$$t' = \frac{1}{v_z}, \quad x' = \frac{v_x}{v_z}, \quad y' = \frac{v_y}{v_z}$$

から、

$$\sqrt{c^2 t'^2 - 1 - x'^2 - y'^2} = \frac{c}{\gamma v_z}$$

が得られ (γ は Lorentz factor)、結局

$$p_t = -\gamma mc^2 - e\varphi$$

となることがわかる。

つまり、 p_t は粒子のエネルギーに負号をつけたものである。

正準運動量とエミッタンス

- エミッタンスが保存する位相空間は位置 x と正準運動量

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{mcx'}{\sqrt{c^2t'^2 - 1 - x'^2 - y'^2}} + eA_x \\ &= \gamma m v_z x' + eA_x \end{aligned}$$

の張る空間である。力学運動量 $p_{xm} = \gamma m v_z x'$ ではない。

- それらはベクトルポテンシャル eA_x だけずれているが、エミッタンスの保存から、古典力学においても「ベクトルポテンシャルの実在性」を議論できるのではないか？

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^2 &= \langle x^2 \rangle \langle p_x^2 \rangle - \langle xp_x \rangle^2, \\ \Delta \varepsilon_x^2 &= \langle x^2 \rangle \langle 2p_{xm} eA_x + e^2 A_x^2 \rangle - \langle x eA_x \rangle^2 \end{aligned}$$

実例: 自由空間

- 当然自由空間では解ける。 $s = s_1$ から $s = s_2 = s_1 + \ell$ までの解(変換)を求める。ハミルトニアンは

$$H = -\sqrt{p_t^2/c^2 - m^2c^2 - p_x^2 - p_y^2}$$

- 運動方程式:

$$(x, y, t)' = (p_x, p_y, -p_t/c^2)/p_s$$

$$(p_x, p_y, p_t)' = 0$$

$$p_s \equiv \sqrt{p_t^2/c^2 - m^2c^2 - p_x^2 - p_y^2} = -H$$

- 従って求める変換は

$$(x, y, t)_2 = (x, y, t)_1 + \frac{(p_x, p_y, -p_t/c^2)_1}{p_s} \ell$$

$$(p_x, p_y, p_t)_2 = (p_x, p_y, p_t)_1$$

運動量に対し非線形

より実用的な変数

- 運動量とポテンシャルを基準 (力学) 運動量 p_0 で規格化する:

$$\bar{H} = -(1 + x/\rho) \sqrt{(\bar{p}_t + e\bar{\varphi})^2/c^2 - m^2c^2/p_0^2 - (\bar{p}_x - e\bar{A}_x)^2 - (\bar{p}_y - e\bar{A}_y)^2} \\ - (1 + x/\rho)e\bar{A}_s$$

$$(\bar{H}, \bar{\mathbf{p}}) \equiv (H, \mathbf{p})/p_0, (\bar{\varphi}, \bar{\mathbf{A}}) \equiv (\varphi, \mathbf{A})/p_0$$

- とりあえず $p_0 = \text{const.}$ を前提とするが、線形加速器の場合 p_0 を場所の関数とする場合があり (SAD もそのひとつ)、注意を要する。
- 以下、上線は省略。

より実用的な変数(2)

- 母関数による変数変換：ラグランジアンにある関数 G の完全微分 dG を加えても最小作用の原理は変わらない：

$$Lds = Hds - p_x dx + dG = H'ds - p'_x dx'$$

- 例えば $G = G(p'_x, x, s)$ の時は、

$$Hds - p_x dx + \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial p'_x} dp'_x + \frac{\partial G}{\partial s} ds = H'ds - d(p'_x x') + x' dp'_x$$

であるから、

$$p_x = \frac{\partial G}{\partial x}, \quad x' = \frac{\partial G}{\partial p'_x}, \quad H' = H + \frac{\partial G}{\partial s}$$

であればダッシュのついた変数は H' のもとでの正準変数である。

- 母関数による変換もまたシンプレクティック変換である：

$$M = \frac{\partial(x', p'_x)}{\partial(x, p_x)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial p'_x} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \frac{\partial^2 G}{\partial p_x'^2} / \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial p'_x} & \frac{\partial^2 G}{\partial p_x'^2} / \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial p'_x} \\ -\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} / \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial p'_x} & 1 / \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial p'_x} \end{pmatrix},$$
$$\det M = 1.$$

より実用的な変数(3)

- 正準変数 (t, p_t) を (z, p) に変更: 母関数

$$G(t, p) = -E \left(t - \frac{s}{v_0} \right) = - \left(c \sqrt{(p + e\varphi/c)^2 + m^2 c^2 / p_0^2} + e\varphi \right) \left(t - \frac{s}{v_0} \right)$$

を用いて、

$$z = \frac{\partial G}{\partial p} = -c \frac{(p + e\varphi/c)}{\sqrt{(p + e\varphi/c)^2 + m^2 c^2 / p_0^2}} \left(t - \frac{s}{v_0} \right) = -v(t - t_0)$$

$$p_t = \frac{\partial G}{\partial t} = -c \sqrt{(p + e\varphi/c)^2 + m^2 c^2 / p_0^2} - e\varphi = -E$$

$$H' - H = \frac{\partial G}{\partial s} = \frac{E}{v_0} + \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{c} \right) z e \frac{\partial \varphi}{\partial s}$$

- こうして新しいハミルトニアンが得られる:

$$H = -(1 + x/\rho) \sqrt{(p + e\varphi/c)^2 - (p_x - eA_x)^2 - (p_y - eA_y)^2} \\ - (1 + x/\rho) eA_s + \frac{E}{v_0} + \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{c} \right) z e \frac{\partial \varphi}{\partial s},$$

$$p = \sqrt{(E - e\varphi)^2 / c^2 - m^2 c^2 / p_0^2} - e\varphi / c.$$

実例

- 長さ ℓ のドリフト空間

$$H = -\sqrt{p^2 - p_x^2 - p_y^2} + \frac{E}{v_0}$$

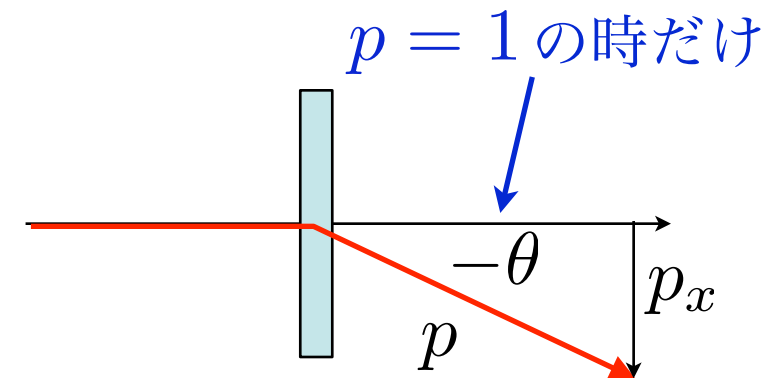
$$(x, y) = (x, y)_0 + \ell(p_x, p_y)/p_z, \quad z = z_0 + \left(\frac{v}{v_0} - \frac{p}{p_z}\right) \ell$$

$$p_z \equiv \sqrt{p^2 - p_x^2 - p_y^2}$$

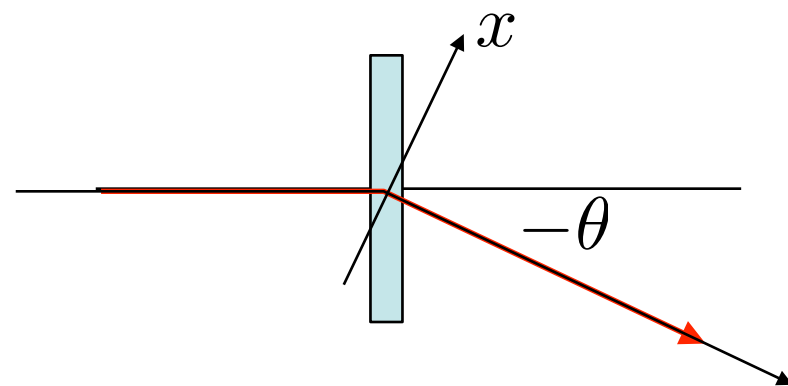
- x方向に基準曲げ角 $-\theta$ の薄いキック

$$H = x \sin \theta \delta(s - s_0)$$

$$(p_x, p_y, p) = (p_{xi} - \sin \theta, p_{yi}, p_i)$$



- 同じく、しかし座標も曲がる場合(リングのアーチ部の近似)



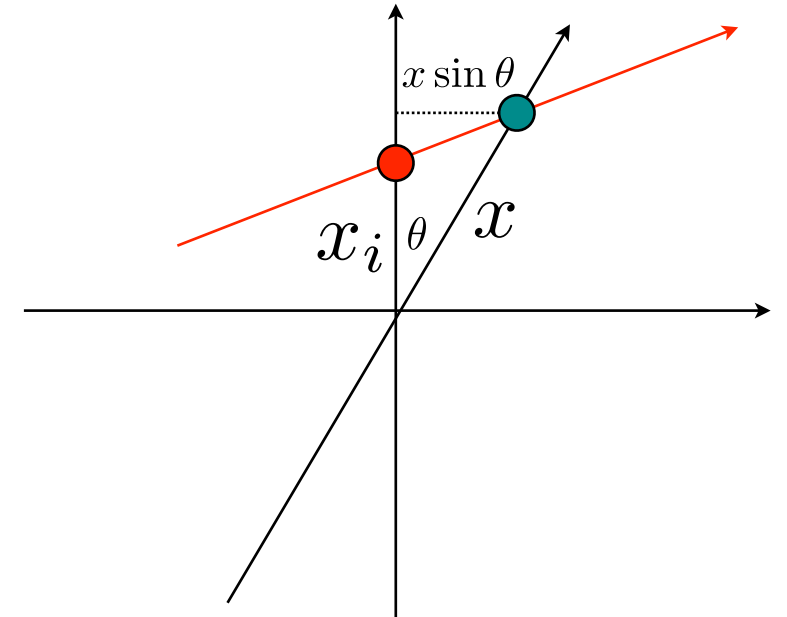
実例(2)

- 座標の回転による位置の変換: $x \cos \theta = x_i + \frac{p_{xi}}{p_{zi}} x \sin \theta$ から

$$x = \frac{x_i}{\cos \theta - \frac{p_{xi}}{p_{zi}} \sin \theta}$$

$$y = y_i + \frac{p_{yi}}{p_{zi}} x \sin \theta$$

$$z = z_i - \frac{p_i}{p_{zi}} x \sin \theta$$



- 運動量の回転による変換:

$$p_x = p_{xi} \cos \theta + p_{zi} \sin \theta - \sin \theta$$

$$p_{zi} \equiv \sqrt{p_i^2 - p_{xi}^2 - p_{yi}^2}$$

- さらに、アーク部のベンドの場合、外側ほど磁場を通過する距離が長いので

$$p_x = p_{xi} \cos \theta + p_{zi} \sin \theta - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \sin \theta$$

$$p_{zi} \equiv \sqrt{p_i^2 - p_{xi}^2 - p_{yi}^2}$$

- 上記の変換は当然シンプレクティックである。

実例(3)

- さて、上の変換を微小角 $d\theta = \frac{ds}{\rho}$ に対して行い、その後には長さ ds のドリフトを行うと、

$$dp_x = \left(p_z - 1 - \frac{x}{\rho} \right) \frac{ds}{\rho}$$

$$dx = \frac{p_x}{p_z} \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) ds$$

$$dy = \frac{p_y}{p_z} \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) ds$$

$$dz = -\frac{p}{p_z} \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) ds + \frac{v}{v_0} ds$$

となるが、これらは一様磁場 $\mathbf{B} = (0, -B, 0)$, $B = \frac{p_0}{e\rho}$ のハミルトニアン

$$H = - \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) \sqrt{p^2 - p_x^2 - p_y^2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\rho} \right)^2 + \frac{E}{v_0}$$

から導かれる運動方程式に (当然の事ながら) 等しい。

実例(4)

- 一般に、一様磁場中の運動には解析解(螺旋運動)がある。今の
場合、

$$\frac{d^2 p_x}{d\theta^2} = -p_x, \quad \left(\theta = \frac{s}{\rho} \right)$$

であることが容易にわかるので、解

$$p_x = p_{xi} \cos \theta + \left(p_{zi} - 1 - \frac{x_i}{\rho} \right) \sin \theta$$

$$x = \rho \left\{ p_{xi} \sin \theta - \left(p_{zi} - 1 - \frac{x_i}{\rho} \right) \cos \theta + p_z - 1 \right\}$$

$$y = y_i + \rho p_{yi} \left(\theta + \tan^{-1} \frac{p_{xi}}{p_{zi}} - \tan^{-1} \frac{p_x}{p_z} \right)$$

$$z = z_i - \rho p_i \left(\theta + \tan^{-1} \frac{p_{xi}}{p_{zi}} - \tan^{-1} \frac{p_x}{p_z} \right) + \frac{v}{v_0} \rho \theta$$

が得られる。

分散

- 水平ベンドの解のx方向の線形部分:

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{\rho} & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ p_{xi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} (p_i - 1)$$

- θ と共に水平方向に全運動量 p の1からのずれに比例した変位が発生する。これを運動量分散、あるいは単に**分散**、と呼ぶ。

- 分散は自由度間の結合の一形態である。一般には

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta p_x \\ \delta y \\ \delta p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta x_\beta \\ \delta p_{x\beta} \\ \delta y_\beta \\ \delta p_{y\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_{p_x} \\ \eta_y \\ \eta_{p_y} \end{pmatrix} \delta p \quad (\delta \text{ は中心軌道からのずれを表す})$$

- さらに進行方向の位置にも結合が発生する(シンプレクティック変換!).

$$\delta z = \delta z_\beta - \eta_{p_x} \delta x_\beta + \eta_x \delta p_{x\beta} - \eta_{p_y} \delta y_\beta + \eta_y \delta p_{y\beta}$$

- 実際には入口の変位にすでに分散が含まれているかもしれない。リングの場合には前述のように、一周の周回行列から分散の周期解が求まる。

分散(2)

- いま、分散がある場所に、前述の薄いベンドがあるとする。その場合、粒子の到着時刻の遅れの項は

$$\frac{dz}{ds} = -\frac{p}{p_z} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) + \frac{v}{v_0}$$

$$\frac{p}{p_z} ds \approx \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p_x^2}{p^2}\right) ds$$

$$\approx \underbrace{-\frac{1}{2} \left(\frac{p_x}{p}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{p_y}{p}\right)^2}_{\text{軌道の傾きによる距離の伸び}} \underbrace{- \frac{x_\beta + \eta_x \delta p}{\rho}}_{\text{リングの外側を通るための軌道の伸び}} + \underbrace{\frac{v}{v_0} - 1}_{\text{速度差による到着時刻の差}}, \quad (\delta p \equiv p - 1)$$

軌道の傾きによる
距離の伸び

リングの外側を通る
ための軌道の伸び

速度差による
到着時刻の差

- 運動量のずれによる到着時刻のずれは

$$\frac{dz}{ds} \approx \left(-\frac{\eta_x}{\rho} + \frac{1}{\gamma^2}\right) \delta p$$

運動量縮約率

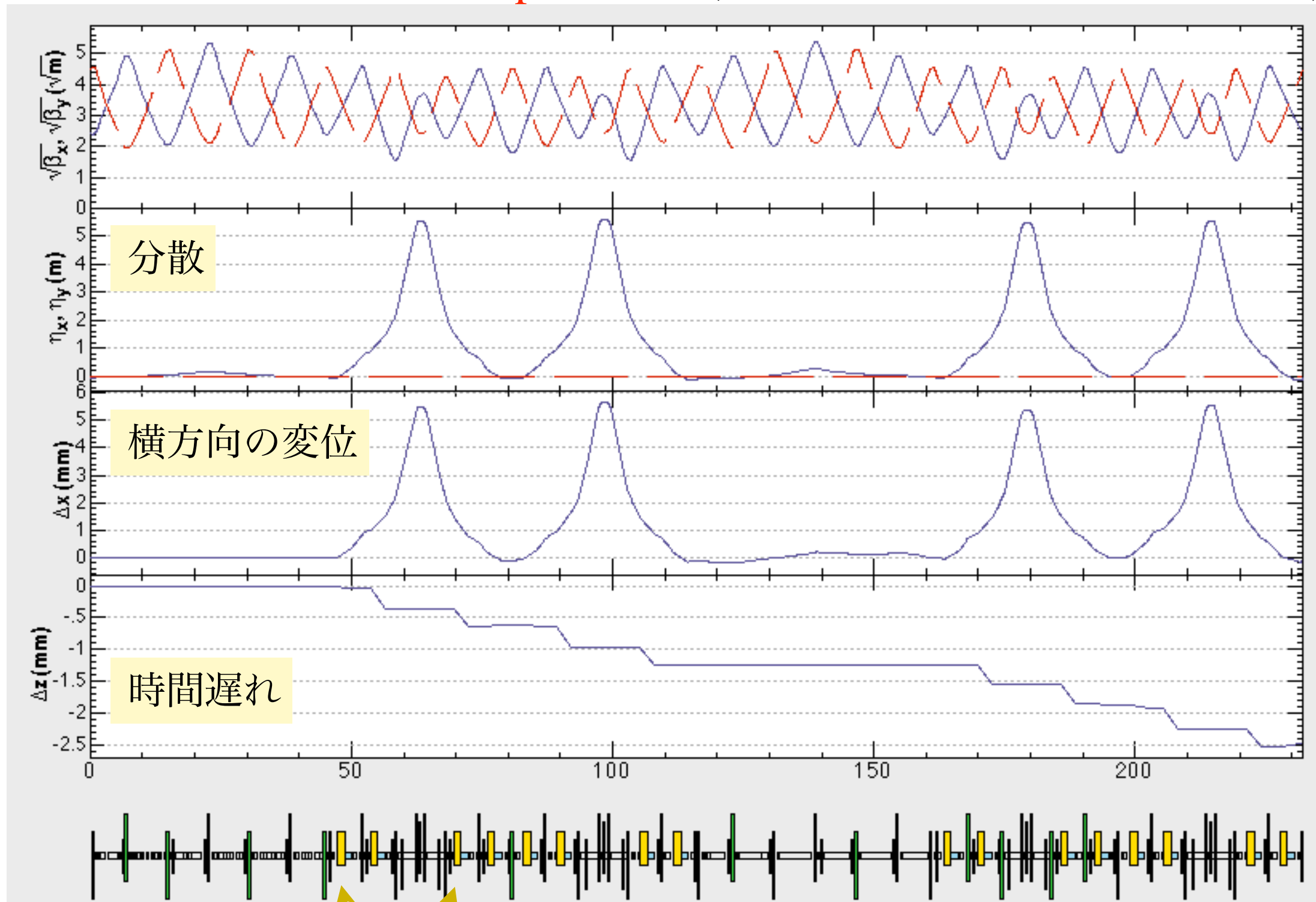
momentum compaction

と書かれ、リング一周では(運動量は急激には変わらないとして)、

$$\frac{\Delta z}{C} = \left(-\alpha_p + \frac{1}{\gamma^2}\right) \delta p, \quad \alpha_p \equiv \int_0^C \left(\frac{\eta_x}{\rho_x} + \frac{\eta_y}{\rho_y}\right) ds$$

分散(3)

分散と時間遅れの例: $\delta p = 0.1\%$ (J-PARC RCSに電子を入射した場合)



二極(偏向)磁石

実例(5)

- 進行方向に一様な静磁場は

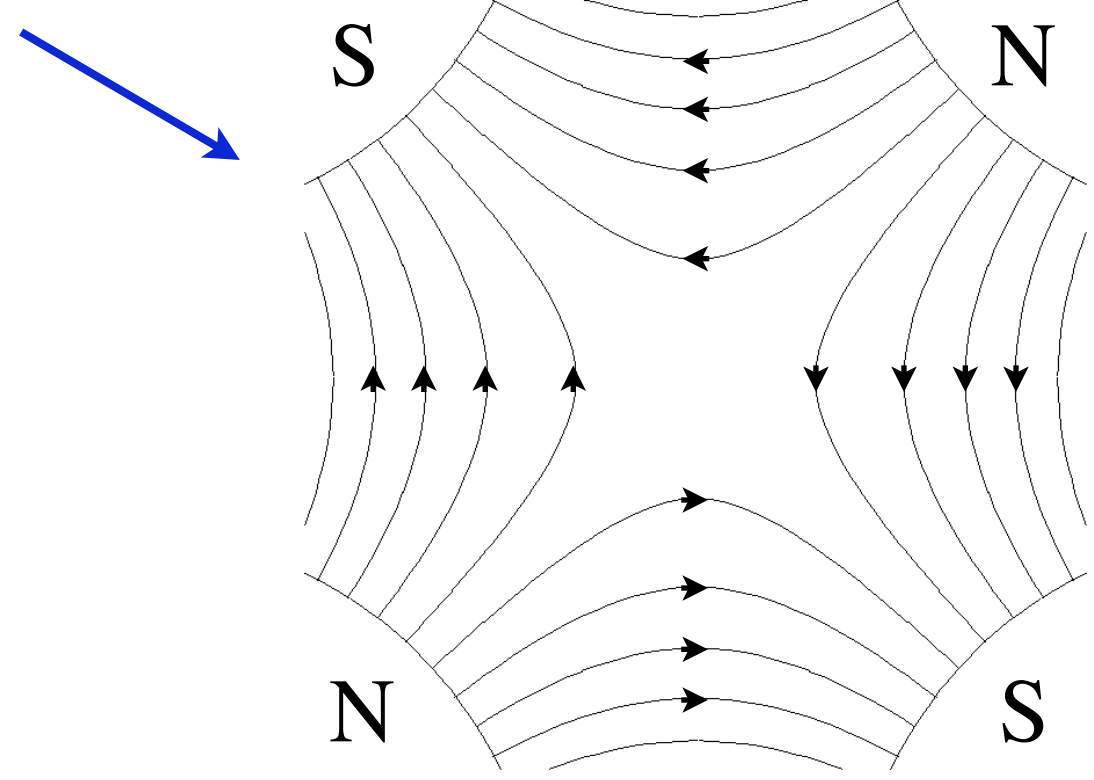
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) A_s = 0$$

$$A_s = \Re \left[\sum_{n=0} \frac{K_{n-1}}{n!} (x + iy)^n \exp(i\theta_n) \right]$$

で表現可能である。ここで K_{n-1} を $2n$ 重極の係数と言う。

- 四重極 ($\theta_2 = 0$): $A_s = \frac{K_1}{2}(x^2 - y^2)$

- 歪四重極 ($\theta_2 = \frac{\pi}{4}$): $A_s = -K_1xy$



- $n > 1$ では長さが有限の場合、解析的な解はない。

- $n > 2$ では薄いレンズと自由空間の繰り返しで近似することが多い。

$$B_y = -K_1x$$

$$B_x = -K_1y$$

実例(6)

- 四重極 ($n = 2$) の場合、

$$H = -p_z + \frac{K_1}{2}(x^2 - y^2) + \frac{v}{v_0} = \frac{1}{2} \frac{p_x^2}{p} + \frac{1}{2} \frac{p_y^2}{p} + \frac{K_1}{2}(x^2 - y^2) + \frac{v}{v_0} - p + \Delta p_z$$

$$\Delta p_z \equiv p - p_z - \frac{1}{2} \frac{p_x^2}{p} - \frac{1}{2} \frac{p_y^2}{p} = \frac{(p - p_z)^2}{2p} \quad p_z \equiv \sqrt{p^2 - p_x^2 - p_y^2}$$

と書けるが、青線部は解析的に解ける。青線部を解き、 Δp_z による補正(これも解析的に解ける)を薄いレンズとして時々まぜてやればよい (SAD)。

- 青線部の横方向の解は $K_1 > 0$ の場合、

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{K_1}{p}} \ell & \sqrt{\frac{1}{K_1 p}} \sin \sqrt{\frac{K_1}{p}} \ell & 0 & 0 \\ -\sqrt{K_1 p} \sin \sqrt{\frac{K_1}{p}} \ell & \cos \sqrt{\frac{K_1}{p}} \ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \sqrt{\frac{K_1}{p}} \ell & \sqrt{\frac{1}{K_1 p}} \sinh \sqrt{\frac{K_1}{p}} \ell \\ 0 & 0 & \sqrt{K_1 p} \sinh \sqrt{\frac{K_1}{p}} \ell & \cosh \sqrt{\frac{K_1}{p}} \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \end{pmatrix}_0$$

つまり、x方向に凸レンズ、y方向に凹レンズになる。