SADの基礎

20 Apr. 2011

K. Oide (KEK)

ビーム内の粒子の運動

- 大抵の場合、各粒子は古典力学的な対象として扱って良い。
- 粒子の集団としての位相空間内の広がりは、Planck定数より十分大きい:

$$\varepsilon = \Delta y \Delta p_y / mc \geq 2 \times 10^{-8} \text{ m (ILC Damping Ring)}$$
$$\gg \lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{mc}$$

- 普通、放射などによる量子力学的効果は摂動として扱う。
- 実はビームの運動を「完全に」量子論的に解くのは事実上困難:
  - 例えば、電磁石でビーム粒子が曲げられる現象を解くには、電磁石を構成する10^{2x}個の素粒子とビーム粒子の相互作用として表現しなければならない。
  - 電磁石側を古典的な「外場」として扱い、ビーム粒子だけを量子化することは可能。

運動方程式

- ビーム粒子の運動方程式はHamiltonの運動方程式である（電磁気力、重力）。

$$x' = \frac{dx}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_x}$$
$$p_x' = \frac{dp_x}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

$\boxed{\text{Hamiltonian}}$

- 独立座標は、時間の代わりに、ある曲線 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(x, y, z)$ に沿った長さ s をとる方が、加速器の場合は便利。この曲線は、実際にある粒子が通る軌道である必要はない。
- Hamiltonianは時間あるいは s の関数でよい。
- Hamiltonの運動方程式のご利益は？　Lorentzの運動方程式と等価なのでは？

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

なぜHamiltonian?

- すべての古典力学の運動方程式はHamiltonの運動方程式と等価である。

- しかし、等価ならば、なぜ敢えてHamiltonianにこだわる必要があるのか?

- 通常の運動方程式とHamiltonの運動方程式が等価なのは、**それらが正確な解にまでたどり着いた場合だけ**である。実際のほとんどの場合には、何らかの近似解・近似解法が必要になる。

- 近似には無限のやり方がある。しかし、何らかのHamiltonianに基づく近似法のみが物理的に意味がある。

- それは、Hamiltonianに基づく近似法のみが、**「正準交換関係の保存」**という、隠れた、しかしきわめて強力な物理法則を満たすことができるからである。

なぜHamiltonian? (2)

- 実例　1次元振り子:　$H = \frac{p^2}{2} + (1 - \cos x)$

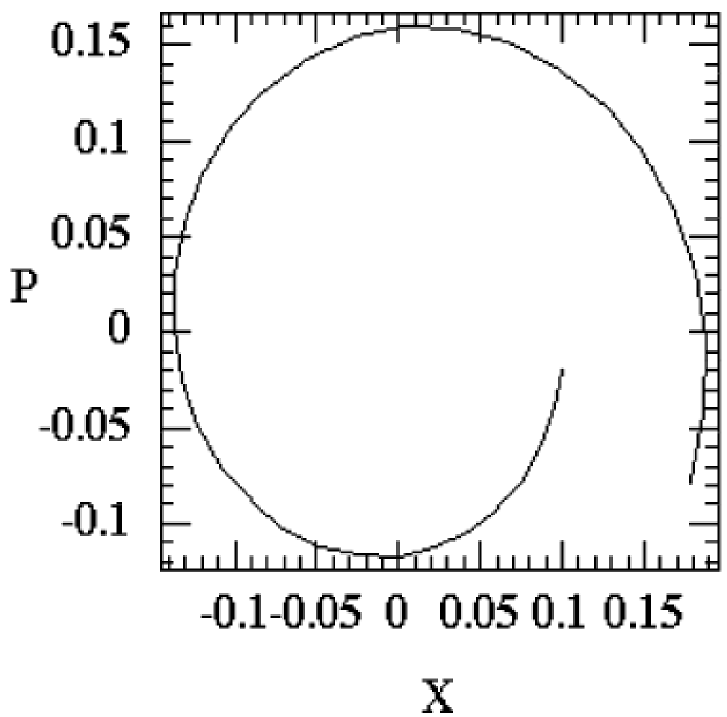
- 運動方程式:　$x' = p, \quad p' = -\sin x$

- この方程式は解析解をもつが、とりあえず数値的に解くことを考えよう。一つの考えられる方法は、短い時間間隔 Δt に対し、

$$\boxed{\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + p_n \Delta t \\ p_{n+1} &= p_n - \sin x_n \Delta t \end{aligned}}$$

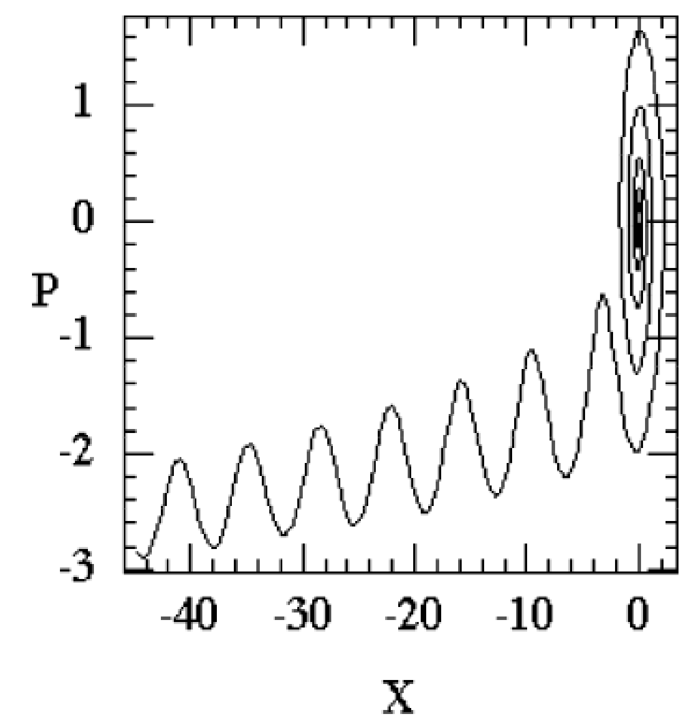
のような変換を繰り返すことである。その結果は?

なぜHamiltonian? (3)

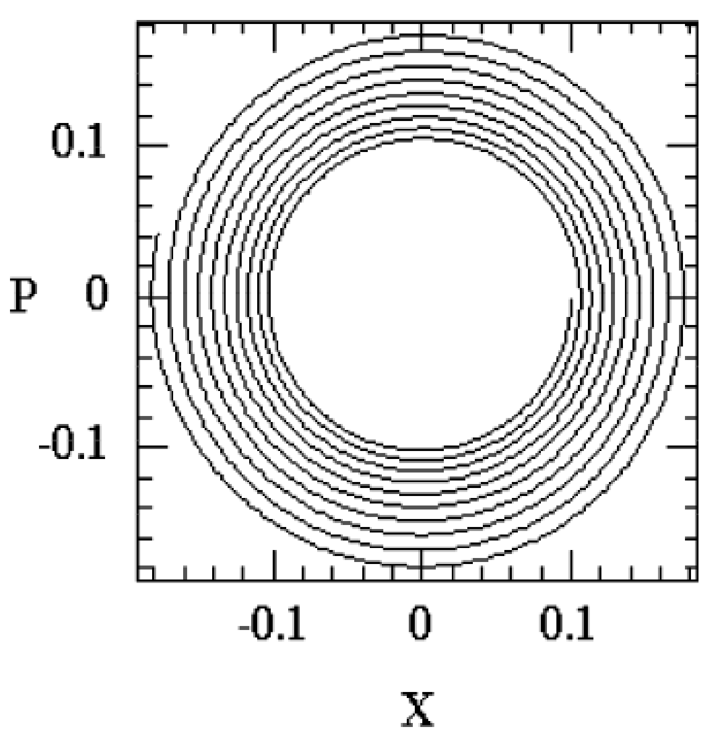


- その結果、軌道は左図のように時間と共に発散する!

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + p_n \Delta t \\
p_{n+1} &= p_n - \sin x_n \Delta t \\
\Delta t &= 0.2
\end{aligned}
$$



長時間では右のように振り子は回転する。:



- Δt を小さくしても軌道が発散することに代わりはない（左図）。

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + p_n \Delta t \\
p_{n+1} &= p_n - \sin x_n \Delta t \\
\Delta t &= 0.02
\end{aligned}
$$

なぜHamiltonian? (4)

- 実は変換

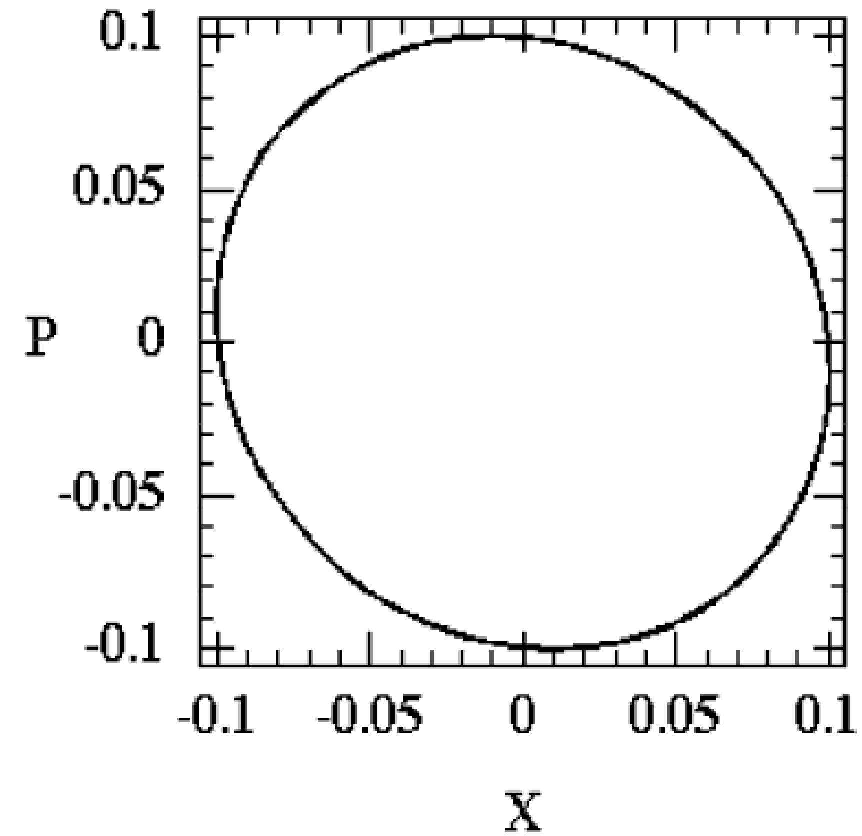
$$x_{n+1} = x_n + p_n \Delta t$$
$$p_{n+1} = p_n - \sin x_n \Delta t$$

は、どのようなHamiltonianにも対応しない、非物理的な変換である。

- 一方、一見似た様な変換

$$x_{n+1} = x_n + p_n \Delta t$$
$$p_{n+1} = p_n - \sin x_{n+1} \Delta t$$

の場合、軌道は発散せず、右の図のように閉じる:



$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + p_n \Delta t \\ p_{n+1} &= p_n - \sin x_{n+1} \Delta t \\ \Delta t &= 0.2 \end{aligned}$$

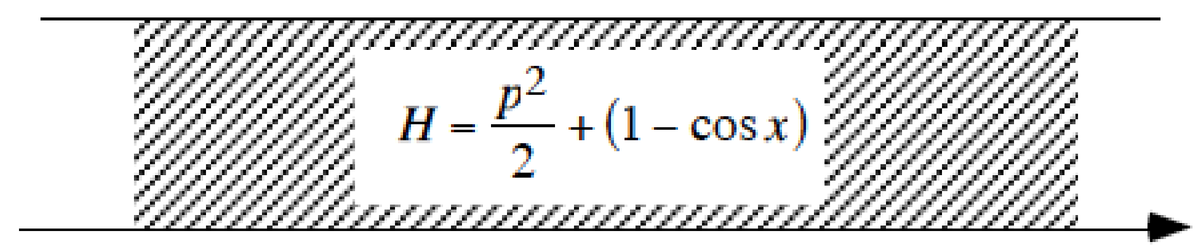
なぜHamiltonian? (5)

- 実は変換

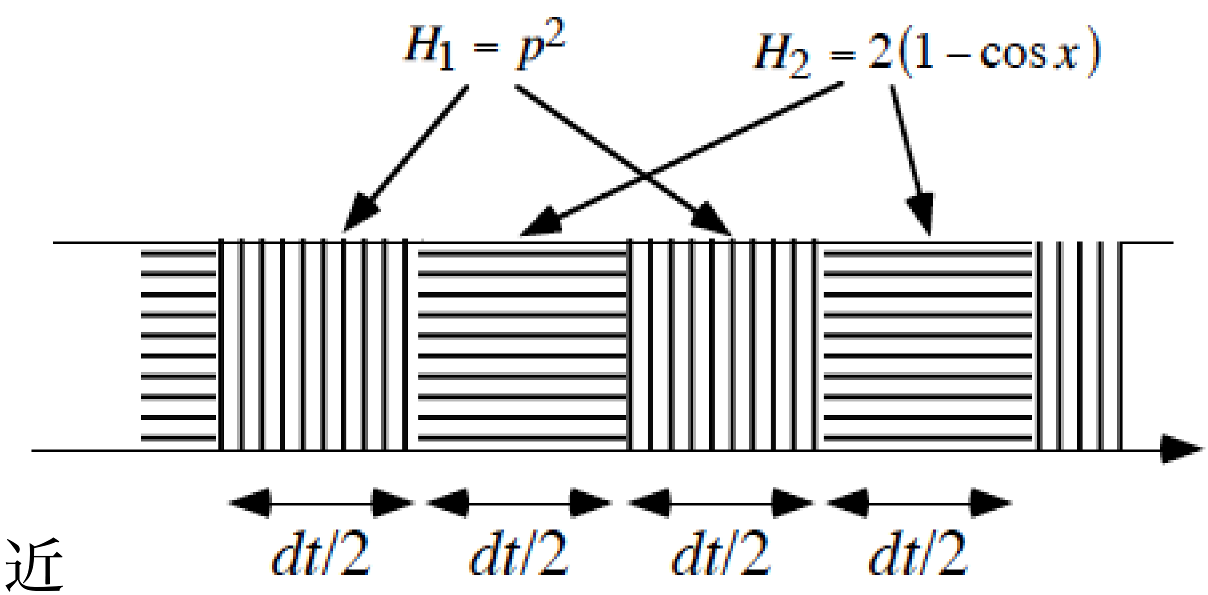
$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + p_n \Delta t \\
p_{n+1} &= p_n - \sin x_{n+1} \Delta t
\end{aligned}
$$

の各ステップは、それぞれ二つのHamiltonian $H_p = p^2$ と $H_x = 2(1-\cos x)$ の、時間間隔 $\Delta t/2$ での正確な解になっている。

- したがって、この近似は、元のHamiltonian



を、右図のような、正確な解が得られる別のHamiltonianで近似したことになっている。



- このように、近似においても、あるHamiltonianを別のHamiltonianで置き換えて近似しなければ、物理的性質を失うことになる。

加速器の中のビーム粒子の運動

- ビームライン上のある場所$s = s_0$での粒子の位置と運動量

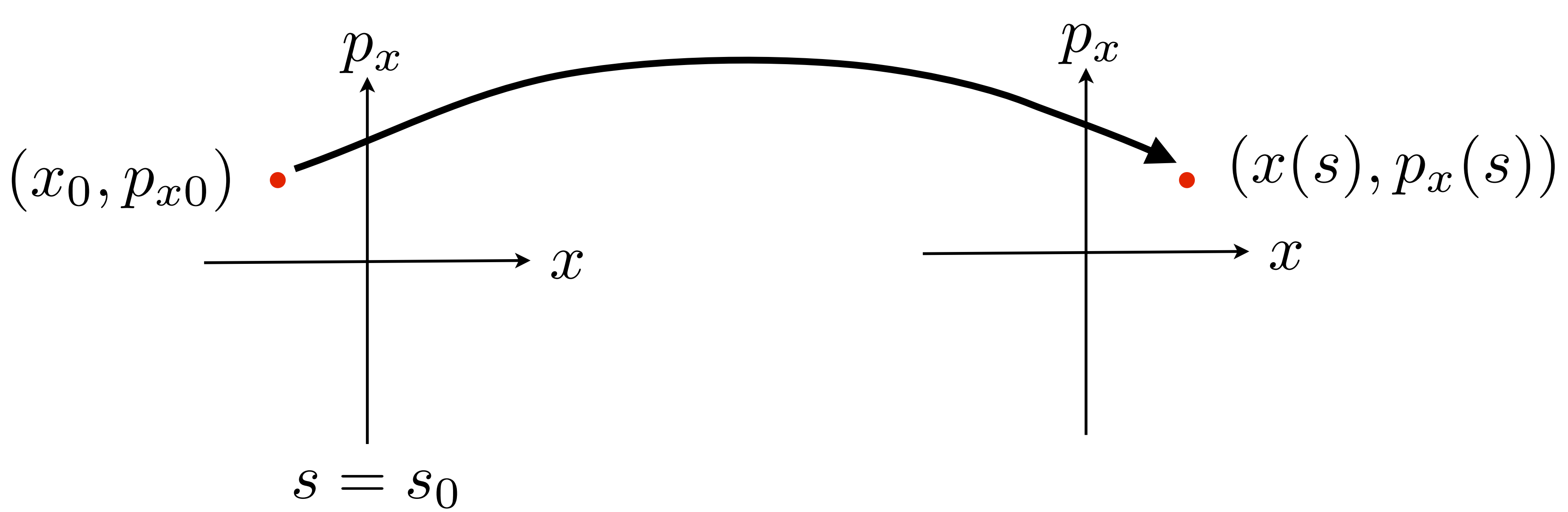
$$z = z_0 = (x_0, p_{x0})$$

が与えられれば、すべての s での位置と運動量

$$z = z(s) = (x(s), p_x(s))$$

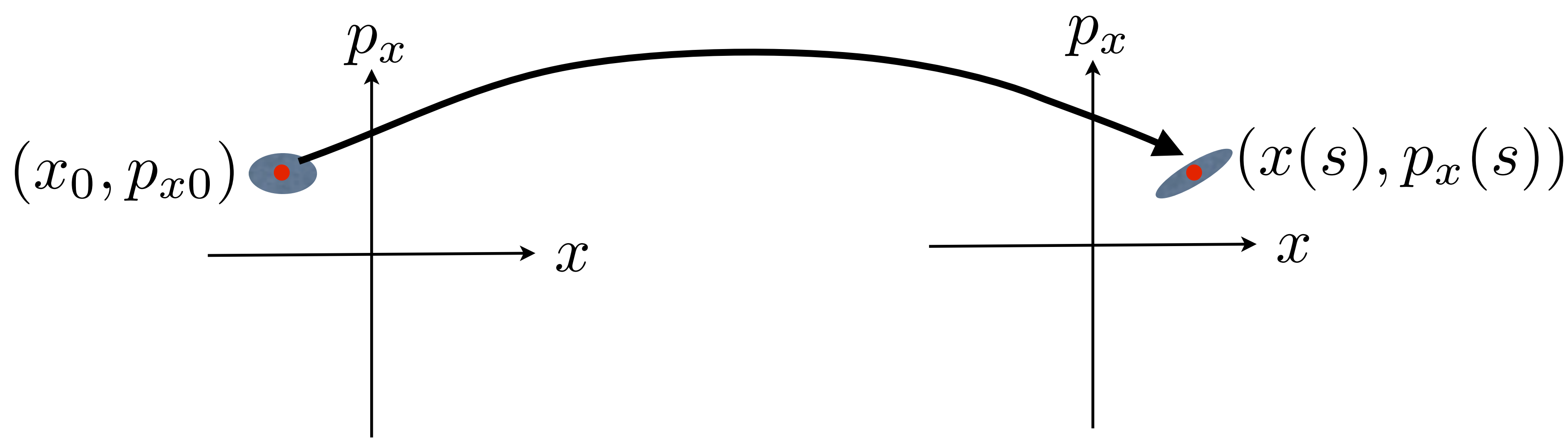
が決まる（とりあえず簡単のため、1自由度のみの運動を考える）。

- ひとつの z から出発して（遡って）二種類以上の z に移ったり、異なる z から同一の z に統合されることはない。



- 上記から、$z = z(s)$ は z_0 の関数 $z = z(z_0; s)$ とも考えられる。

「転送行列」



- ビームは位相空間の小さな領域を占める。
- $z = z(z_0; s)$ をあるz_0の周りで展開:

$$z(z_0 + \Delta z) = z(z_0) + \frac{\partial z}{\partial z_0}\Delta z + (\text{higher order})$$

- この1次の係数 $\dfrac{\partial z}{\partial z_0}$ (Jacobian)を転送行列という。

$$\mathrm{M} \equiv \frac{\partial z}{\partial z_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial p_{x0}} \\ \frac{\partial p_x}{\partial x_0} & \frac{\partial p_x}{\partial p_{x0}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

- この転送行列がビームの運動をまず第一義的に支配する。

転送行列の性質

- **行列式 = 1:**

$$\begin{aligned}\det \mathrm{M} &= M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} \\ &= \frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial p_x}{\partial p_{x0}} - \frac{\partial x}{\partial p_{x0}}\frac{\partial p_x}{\partial x_0} \quad (= [x, p_x]_0) \\ &= 1\end{aligned}$$

Poisson bracket

$$x' = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \qquad p_x' = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}(\det \mathrm{M})' &= M_{11}'M_{22} + M_{11}M_{22}' - M_{12}'M_{21} - M_{12}M_{21}' \\ &= \frac{\partial x'}{\partial x_0}\frac{\partial p_x}{\partial p_{x0}} + \frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial p_x'}{\partial p_{x0}} - \frac{\partial x'}{\partial p_{x0}}\frac{\partial p_x}{\partial x_0} - \frac{\partial x}{\partial p_{x0}}\frac{\partial p_x'}{\partial x_0} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial H}{\partial p_x}\right)\frac{\partial p_x}{\partial p_{x0}} - \frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial p_{x0}}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial p_{x0}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_x}\right)\frac{\partial p_x}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial p_{x0}}\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial p_x}{\partial p_{x0}}\right) - \frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial^2 p_x}{\partial x_0 \partial p_{x0}}$$

$$-\frac{\partial}{\partial p_{x0}}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_0}\right) + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial x_0 \partial p_{x0}}$$

$$-\frac{\partial}{\partial p_{x0}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial p_x}{\partial x_0}\right) + \frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial^2 p_x}{\partial x_0 \partial p_{x0}}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p_{x0}}\right) - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial x_0 \partial p_{x0}}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p_{x0}} + \frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial p_x}{\partial p_{x0}}\right) - \frac{\partial}{\partial p_{x0}}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial p_x}{\partial x_0}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial H}{\partial p_{x0}}\right) - \frac{\partial}{\partial p_{x0}}\left(\frac{\partial H}{\partial x_0}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\det\mathrm{M}' = 0 \;\&\; \det\mathrm{M}(s = s_0) = 1 \;\Rightarrow\; \det\mathrm{M} = 1$$

転送行列の性質(2)

- **行列式 = 1:**
- 前記の1次元振り子の変換の転送行列を見ると:

（発散: 非物理的）

$$x_{n+1} = x_n + p_n \Delta t$$
$$p_{n+1} = p_n - \sin x_n \Delta t$$

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -\cos x_n \Delta t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{detM} = 1 + \cos x_n \Delta t^2 \geq 1$$

（安定）

$$x_{n+1} = x_n + p_n \Delta t$$
$$p_{n+1} = p_n - \sin x_{n+1} \Delta t$$

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\cos x_{n+1} \Delta t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -\cos x_{n+1} \Delta t & 1 - \cos x_{n+1} \Delta t^2 \end{pmatrix} ,$$

$$\mathrm{detM} = 1 \ .$$

転送行列の性質(3)

- 転送行列の行列式が1であることはxと p_xのPoisson Bracket が 1 であることと同値:

$$[x, p_x]_0 = \frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial p_x}{\partial p_{x0}} - \frac{\partial x}{\partial p_{x0}}\frac{\partial p_x}{\partial x_0} = 1$$

- (Poisson Bracketは微分する変数のsに依存しない)

- 一般に多自由度では

$$[x_i, p_k] = \delta_{ik}$$
$$[x_i, x_k] = [p_i, p_k] = 0$$

と表現され、「**正準交換関係の保存**」という、Hamilton力学系の根本法則を表す。

転送行列の性質(4)

- 正準交換関係の保存則と、転送行列 $\mathrm{M} = \dfrac{\partial z}{\partial z_0}$ が以下の性質を持つことは同値:

$$\boxed{\mathrm{M}^T \mathrm{J} \mathrm{M} = \mathrm{J}}$$

$$\mathrm{J} \equiv \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & 0 & \cdots \\ 0 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \qquad z = (x_1, p_1, x_2, p_2, \dots)$$

$$\mathrm{M}^T \mathrm{J} \mathrm{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} \\ M_{12} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} \\ M_{12} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{21} & M_{22} \\ -M_{11} & -M_{12} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & M_{11}M_{22} - M_{21}M_{12} \\ -M_{11}M_{22} + M_{21}M_{12} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{J}$$

- この条件を満たす行列を**シンプレクティク行列**と呼ぶ。転送行列がシンプレクティク行列である変換を**シンプレクティク変換**と呼ぶ。
- Hamilton力学系はシンプレクティク変換である。

転送行列の表現

- 一般に1次元の転送行列は以下のように表現できる:

$$\mathrm{M} = \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta} \end{pmatrix}\right]^{-1}}_{\substack{(u,p_u)\to(x,p_x) \\ \text{出口で物理座標に戻す}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}}_{\substack{\text{基準座標 }(u,p_u) \\ \text{での回転}}} \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta_0} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta_0} \end{pmatrix}\right]}_{\substack{(x,p_x)\to(u,p_u) \\ \text{入り口で物理座標から} \\ \text{基準座標に変換}}}$$

- 入口出口に各2個のパラメータを与えることにより、基準座標ではビームを常に円形にすることができる。

- 「基準座標」:

$$(u,p_u) = \left(\frac{x}{\sqrt{\beta}},\ p_x\sqrt{\beta} + x\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)\ , \qquad (x,p_x) = \left(\sqrt{\beta}u,\ \frac{p_u - \alpha u}{\sqrt{\beta}}\right)$$

- こうすると、転送行列の役割は、基準座標では、位相空間内の単なる回転に過ぎないことになる。

ベータトロン振動

- 単なる回転であるから、基準座標の振幅の2乗和は一定:

$$(u, p_u) = \left(x/\sqrt{\beta},\ p_x\sqrt{\beta} + x\alpha/\sqrt{\beta}\right)$$

$$2J_u \equiv u^2 + p_u^2 = x^2/\beta + (p_x + x\alpha/\beta)^2\,\beta = \text{const.}$$

2J: Courant-Snyder Invariant

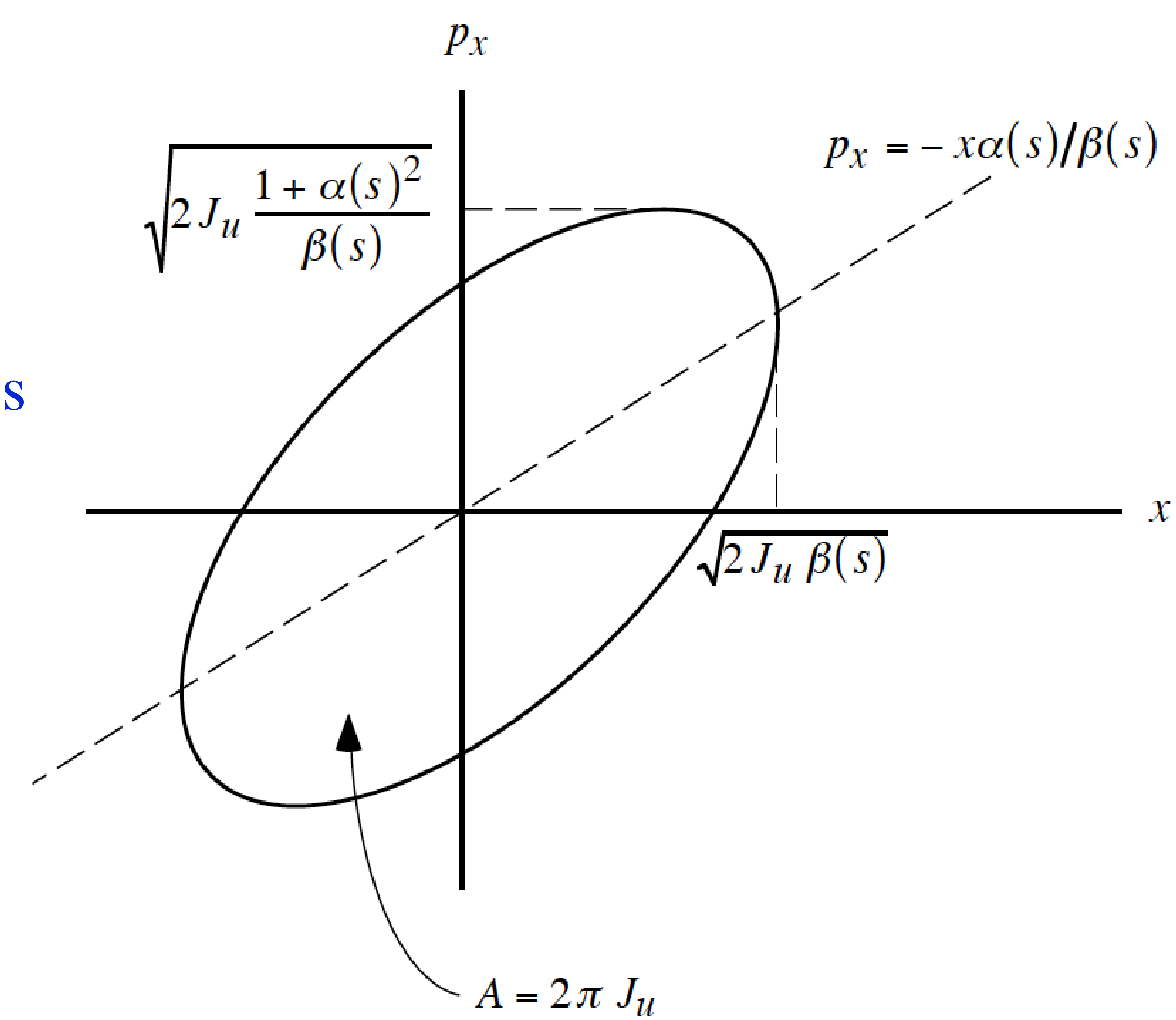
- 基準座標の運動

$$\begin{aligned} u(s) &= \sqrt{2J_u}\sin\left(\phi(s) + \phi_0\right) \\ p_u(s) &= \sqrt{2J_u}\cos\left(\phi(s) + \phi_0\right) \end{aligned}$$

Action & angle variables

- 同一の作用 J_u を持ち、異なる位相 ϕ_0 を持つ粒子群は物理位相空間では右図のような楕円上に並ぶ。

$$(x, p_x) = \left(\sqrt{\beta}u, \frac{p_u - \alpha u}{\sqrt{\beta}}\right)$$



ベータトロン振動(2)

入り口でのパラメータ α_0 と β_0 が与えられれば、任意の s でのパラメータ $\alpha(s)$ と $\beta(s)$ 位相差 $\phi(s)$ は転送行列 M を用いて次のように表現できる：

$$
\begin{aligned}
\alpha(s) &= (M_{11}M_{22}+M_{12}M_{21})\alpha_0 - M_{11}M_{21}\beta_0 - M_{12}M_{22}\frac{1+\alpha_0^2}{\beta_0} \\
\beta(s) &= -2M_{11}M_{12}\alpha_0 + M_{11}^2\beta_0 + M_{12}^2\frac{1+\alpha_0^2}{\beta_0} \\
\phi(s) &= \arg(-M_{12}\alpha_0 + M_{11}\beta_0 + iM_{12})
\end{aligned}
$$

Twissパラメータ

$$
\mathrm{M} = \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ \alpha & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{\beta} & 0\\ 0 & \sqrt{\beta}\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -\sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ \alpha_0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{\beta_0} & 0\\ 0 & \sqrt{\beta_0}\end{pmatrix}\right]
$$

$$
= \begin{pmatrix}\sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}}(\cos\phi+\alpha_0\sin\phi) & \sqrt{\beta\beta_0}\sin\phi\\ -\frac{(\alpha\alpha_0)\cos\phi+(1+\alpha\alpha_0)\sin\phi}{\sqrt{\beta\beta_0}} & \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}}(\cos\phi-\alpha\sin\phi)\end{pmatrix}
$$

ベータトロン振動(3)

- 長さ ds、 収束力密度 K を持つ短い区間の転送行列：

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -Kds & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ds \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ds \\ -Kds & 1 - Kds^2 \end{pmatrix}$$

- その場合の $s = ds$ での Twiss パラメータ：

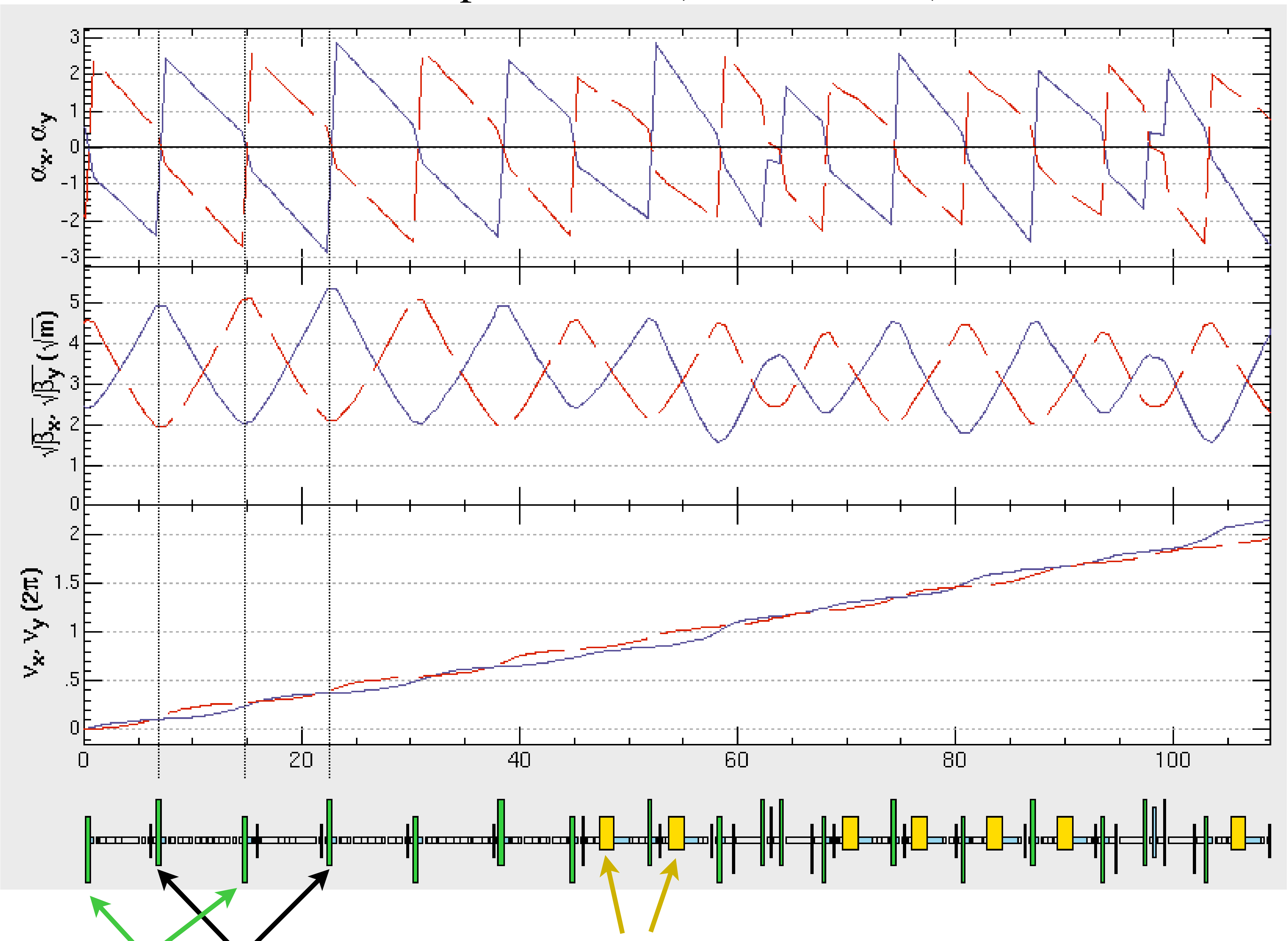
$$\begin{aligned}
\alpha(ds) &= (M_{11}M_{22} + M_{12}M_{21})\alpha_0 - M_{11}M_{21}\beta_0 - M_{12}M_{22}\frac{1+\alpha_0^2}{\beta_0} \\
&= \alpha_0 - \beta_0 Kds - \frac{1+\alpha_0^2}{\beta_0}ds + O(ds^2) \\
\beta(ds) &= -2M_{11}M_{12}\alpha_0 + M_{11}^2\beta_0 + M_{12}^2\frac{1+\alpha_0^2}{\beta_0} \\
&= \beta_0 - 2\alpha_0 ds + O(ds^2) \\
\phi(ds) &= \arg(-M_{12}\alpha_0 + M_{11}\beta_0 + iM_{12}) \\
&= \arg(\alpha_0 ds + \beta_0 + ids) = \frac{ds}{\beta_0} + O(ds^2)
\end{aligned}$$

- 1次の項をとると、

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{ds} &= -K\beta - \frac{1+\alpha^2}{\beta} \\
\frac{d\beta}{ds} &= -2\alpha \\
\frac{d\phi}{ds} &= \frac{1}{\beta}
\end{aligned}$$

ベータトロン振動(4)

Twiss parameters (J-PARC RCS)

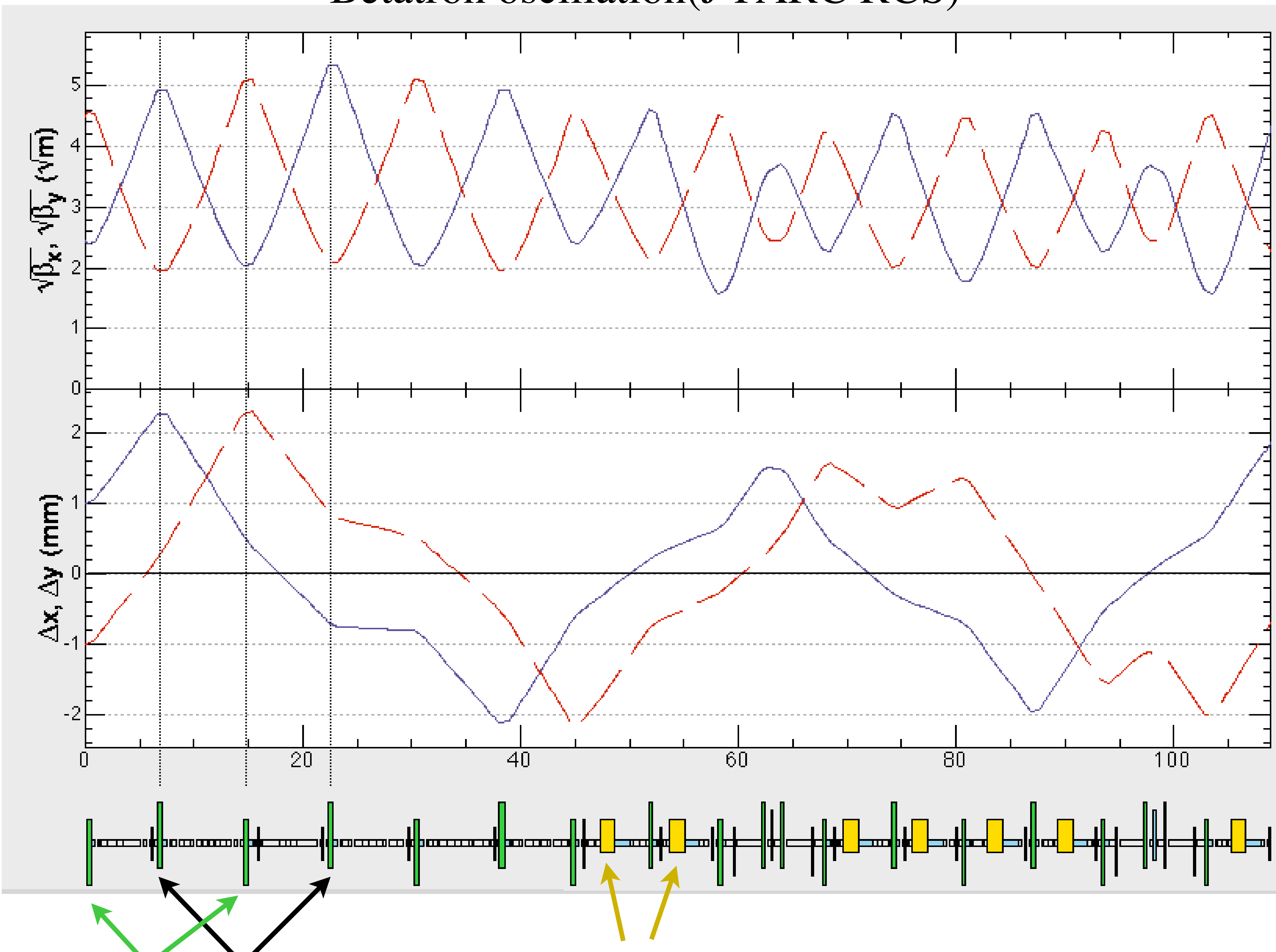


4極磁石(水平方向に発散・収束)

偏向磁石

ベータトロン振動(5)

Betatron oscillation(J-PARC RCS)



4極磁石(水平方向に発散・収束)

偏向磁石

エミッタンスの保存

- エミッタンスとはビーム集団の位相空間内での広がりである:

$$\varepsilon = \sqrt{\langle x^2\rangle\langle p_x^2\rangle - \langle xp_x\rangle^2}$$

- エミッタンスの保存:

S = 0での基準座標を 以下のように選ぶ(ビームに**適合した**Twissパラメータ):

$$\alpha_0 = -\langle x_0 p_{x0}\rangle/\varepsilon,\ \beta_0 = \langle x_0^2\rangle/\varepsilon$$

$$\ni \langle p_{x0}^2\rangle = \frac{\varepsilon^2 + \langle xp_x\rangle^2}{\langle x^2\rangle} = \frac{1+\alpha_0^2}{\beta_0}\varepsilon$$

$$(u, p_u) = \left(\frac{x}{\sqrt{\beta}},\ p_x\sqrt{\beta} + x\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)\ , \qquad (x, p_x) = \left(\sqrt{\beta}u, \frac{p_u - \alpha u}{\sqrt{\beta}}\right)$$

このように選ぶと、基準座標内ではビーム分布は円形になる:

$$\langle u_0^2\rangle = \langle p_{u0}^2\rangle = \varepsilon,\ \langle u_0 p_{u0}\rangle = 0$$

$$\langle u_0^2\rangle = \frac{\langle x_0^2\rangle}{\beta_0} = \varepsilon\ ,$$

$$\begin{aligned}\langle p_{u0}^2\rangle &= \beta_0\langle p_{x0}^2\rangle + \frac{\alpha_0^2}{\beta_0}\langle x_0^2\rangle + 2\alpha_0\langle x_0 p_{x0}\rangle \\ &= (1+\alpha_0^2)\varepsilon + \alpha_0^2\varepsilon - 2\alpha_0^2\varepsilon = \varepsilon\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle u_0 p_{u0}\rangle &= \langle x_0 p_{x0}\rangle + \frac{\alpha_0}{\beta}\langle x_0^2\rangle \\ &= -\alpha_0\varepsilon + \alpha_0\varepsilon = 0\ .\end{aligned}$$

しかも、以後の基準座標の運動は単なる円運動であるから、エミッタンスが保存することは明らか。

- 上記の証明には「適合した」座標を利用したが、エミッタンスの保存という事実はどの座標から見ても成り立つ。

エミッタンスの保存 (2)

- 実はエミッタンス以外にもう一つの保存量がある。任意の基準座標において量:

$$\langle J_u \rangle = \frac{1}{2}\left(\langle u^2 \rangle + \langle p_u^2 \rangle\right)$$

$$\begin{aligned} u(s) &= \sqrt{2J_u}\sin\left(\phi(s)+\phi_0\right) \\ p_u(s) &= \sqrt{2J_u}\cos\left(\phi(s)+\phi_0\right) \end{aligned}$$

$$(u, p_u) = \left(x/\sqrt{\beta},\ p_x\sqrt{\beta} + x\alpha/\sqrt{\beta}\right)$$

は保存する。したがって、そのエミッタンスとの比:

$$B_{\mathrm{MAG}} \equiv \frac{\langle J_u \rangle}{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\frac{\beta_m}{\beta} + \frac{\beta}{\beta_m} + \beta\beta_m\left(\frac{\alpha_m}{\beta_m} - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right]$$

もまた保存する。ここで α_m, β_m はビームに適合したTwissパラメータである。

- 上記の式から、BMAGはTwissパラメータがビームに適合した時に限り1になり、それ以外は

$$B_{\mathrm{MAG}} > 1$$

である。つまり、BMAGはTwissパラメータのビームへの適合の度合いを表す。

周期条件

- もし転送行列

$$\mathrm{M} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta} \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta_0} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta_0} \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}}(\cos\phi + \alpha_0\sin\phi) & \sqrt{\beta\beta_0}\sin\phi \\ -\frac{(\alpha\alpha_0)\cos\phi + (1+\alpha\alpha_0)\sin\phi}{\sqrt{\beta\beta_0}} & \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}}(\cos\phi - \alpha\sin\phi) \end{pmatrix}$$

において $\alpha_0 = \alpha$ and $\beta_0 = \beta$ と選ぶことが可能だとすると、

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha\sin\mu & \beta\sin\mu \\ -\frac{1+\alpha^2}{\beta}\sin\mu & \cos\mu - \alpha\sin\mu \end{pmatrix}$$

となる(ϕはμと書き換えた)が、そのためには以下の条件が必要:

$$\boxed{|\mathrm{TrM}| = |2\cos\mu| \leq 2}$$

- この場合Mの固有値は $\exp(\pm i\mu)$ となり、 $\nu = \mu/2\pi$ はテューンと呼ばれる。
- このようなTwissパラメータの周期解の存在が、粒子がリングを安定に多数回周回するには必要不可欠である。

FODOセルの周期条件

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 - k\ell - k^2 l^2 & 2\ell + k\ell^2 \\ -k^2\ell & 1 + k\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha\sin\mu & \beta\sin\mu \\ -\frac{1+\alpha^2}{\beta}\sin\mu & \cos\mu - \alpha\sin\mu \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TrM} = 2\cos\mu = 2 - k^2\ell^2$$

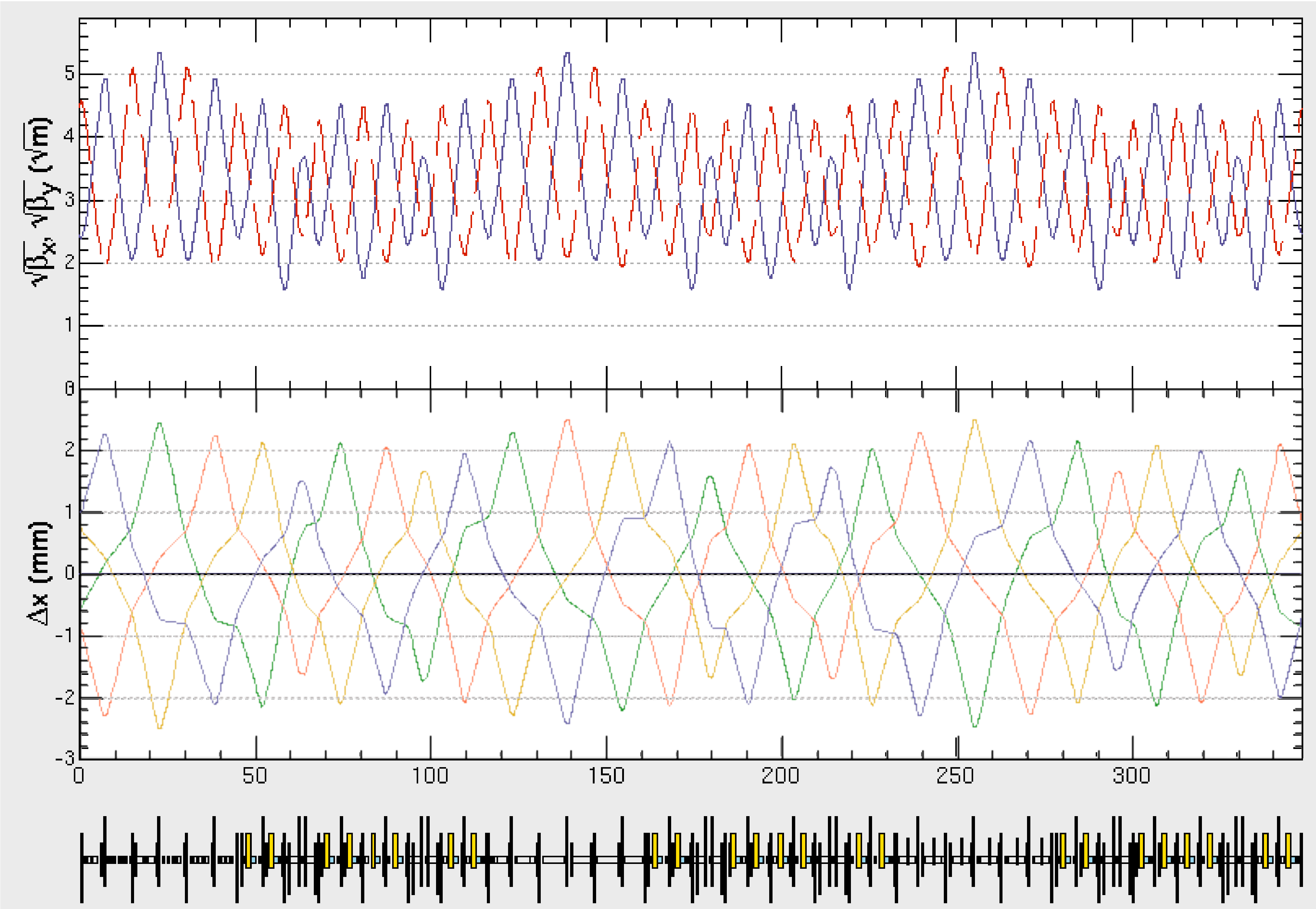
周期解の存在条件: $|\mathrm{TrM}| \leq 2$: $|kl| \leq 2$

$$k\ell = 2\sin\frac{\mu}{2} \qquad \beta = \frac{2 + k\ell}{k\sqrt{1 - k^2\ell^2/4}} = 2\ell\frac{1 + \sin\frac{\mu}{2}}{\sin\mu}$$

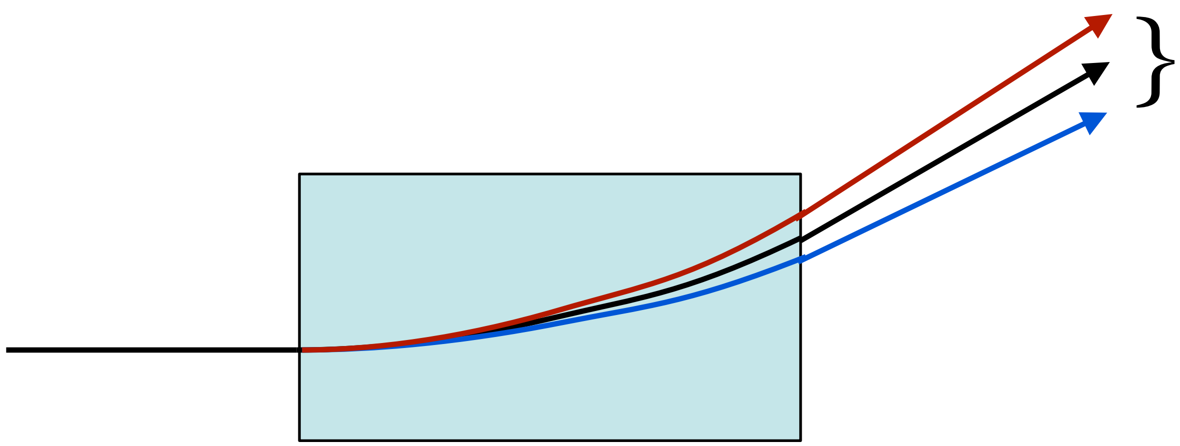
ベータトロン振動

(J-PARC RCS)

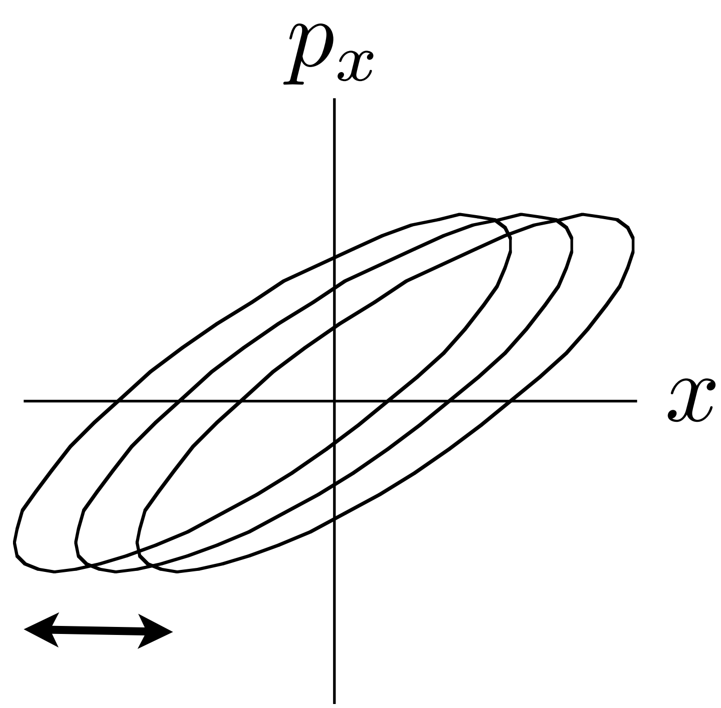
$\mu_x/2\pi = 0.735$



自由度間の結合、分散



偏向磁石:
粒子の全運動量により軌道が異なる。



見かけ上、エミッタンスは増大する。

- しかし、運動量依存性を $x = x_\beta + \eta\delta$ と置いて分離すれば、$(x_\beta, p_{x\beta})$ については、やはりエミッタンスは保存する。
- 量 $\eta = \eta(s)$ は「分散」と呼ばれる。
- 一般に、より自由度の多い場合でも、自由度間の結合は「分散」をうまく定義することにより、独立な自由度の運動として取扱うことができる (線形または弱い非線形の場合)。
- エミッタンスは **それぞれの自由度ごとに** 保存する。($\Leftrightarrow$ Liouville の定理)