

SADのマッチング



11 Jan. 2012

K. Oide (KEK)

なぜマツチング？

- 一般に、転送行列や Twiss パラメータは、磁石の強さや長さの **非線形関数**：

$$M_{\text{quad}} \approx \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{K_1}{p}} \ell & \sqrt{\frac{1}{K_1 p}} \sin \sqrt{\frac{K_1}{p}} \ell & & 0 \\ -\sqrt{K_1 p} \sin \sqrt{\frac{K_1}{p}} \ell & \cos \sqrt{\frac{K_1}{p}} \ell & & 0 \\ & & \cosh \sqrt{\frac{K_1}{p}} \ell & \sqrt{\frac{1}{K_1 p}} \sinh \sqrt{\frac{K_1}{p}} \ell \\ & & \sqrt{K_1 p} \sinh \sqrt{\frac{K_1}{p}} \ell & \cosh \sqrt{\frac{K_1}{p}} \ell \end{pmatrix}$$

- これらを希望の値に合わせる、強さや長さの解は、解析的には求められない。非線形連立方程式。
- たとえ転送行列や Twiss パラメータを解析的に表現したとしても解析解は不可能。
- 解は数値解として求めるしかない \Rightarrow マツチング。

非線形連立方程式

- ある点の近傍に解が存在するかどうか、全体にどのくらい解が存在するかを、a prioriに判定する事はできない。

$$f(x, y) = 0$$
$$g(x, y) = 0$$

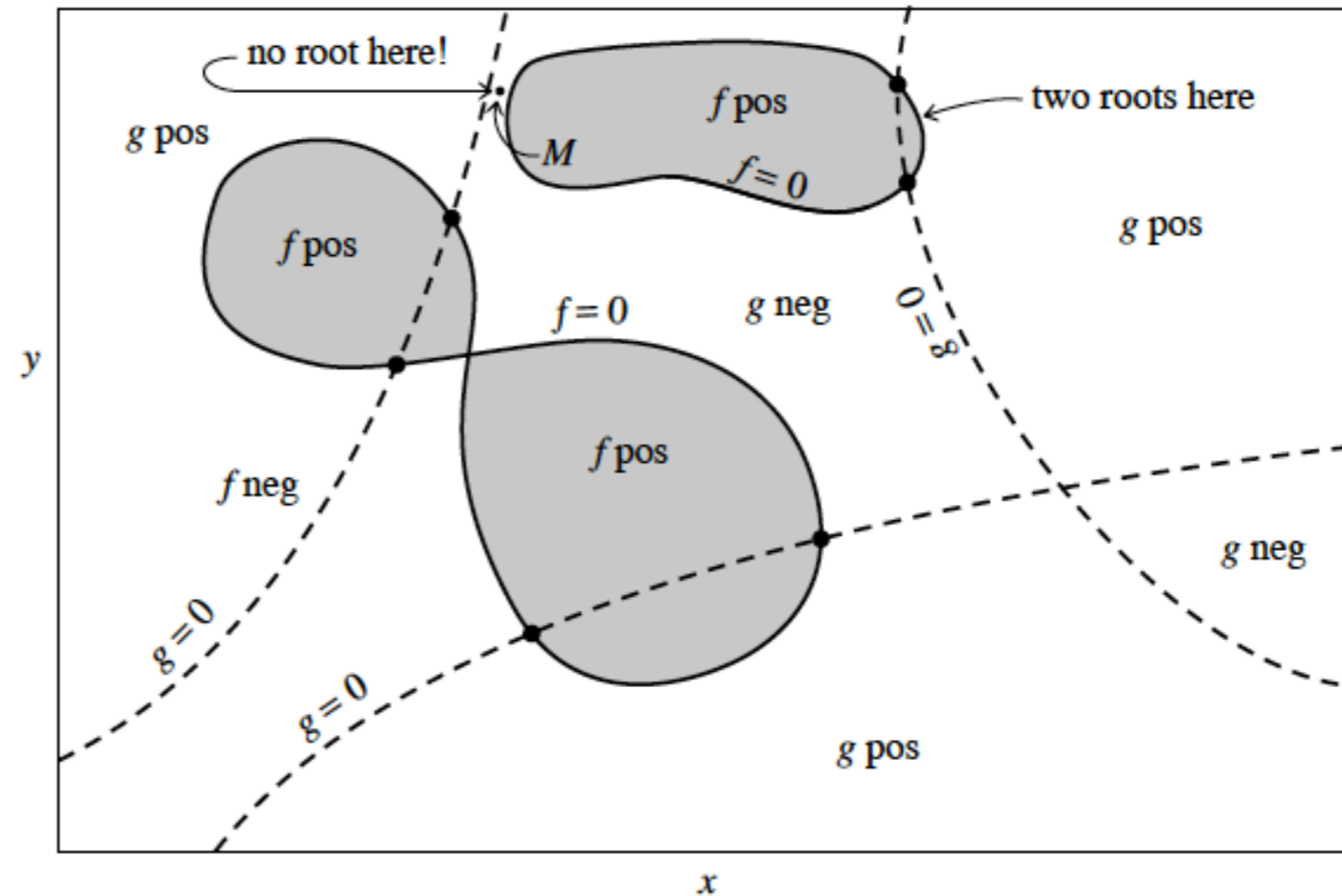


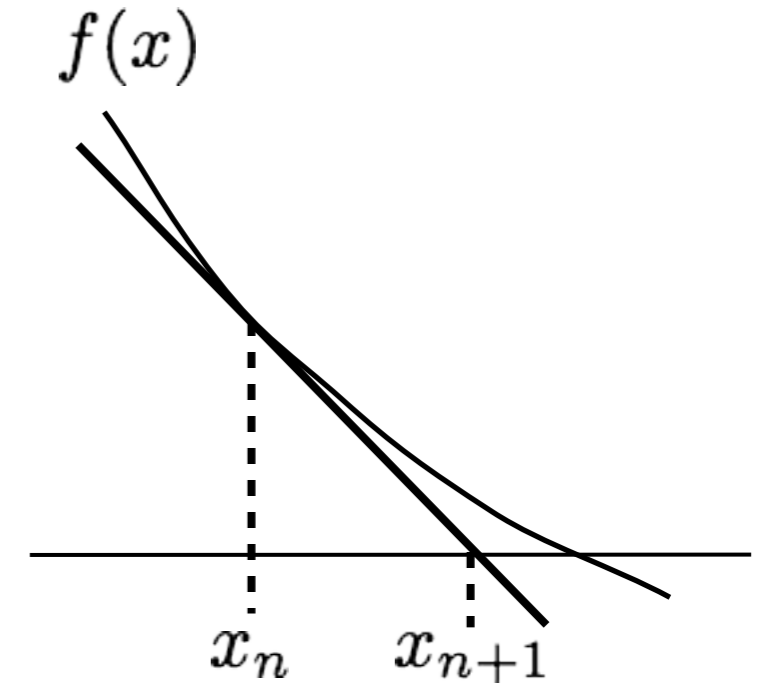
Figure 9.6.1. Solution of two nonlinear equations in two unknowns. Solid curves refer to $f(x, y)$, dashed curves to $g(x, y)$. Each equation divides the (x, y) plane into positive and negative regions, bounded by zero curves. The desired solutions are the intersections of these unrelated zero curves. The number of solutions is a priori unknown.

ニュートン法

- 非線形方程式の数値解を求める上で、ニュートン法は古典的・単純かつ **強力** である。

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- 図のように、解の近傍での収束は極めて高速。



- 多次元への拡張は容易。以下の方程式を SVD で解けば良い：

$$y = - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \cdot \Delta x$$

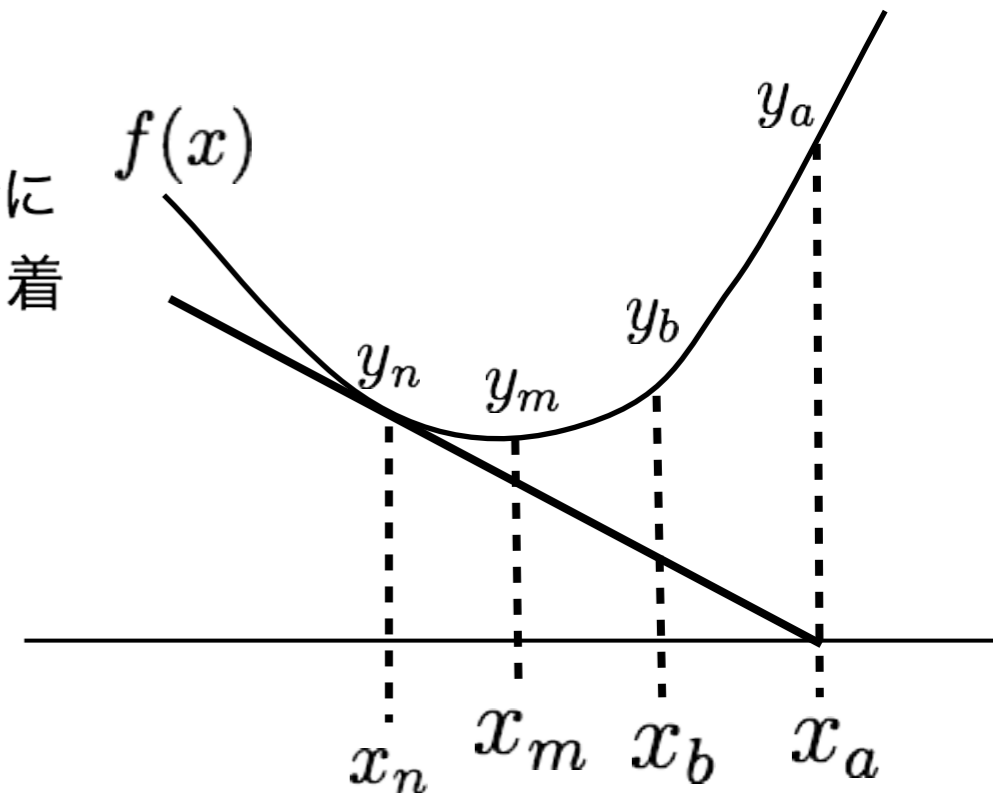
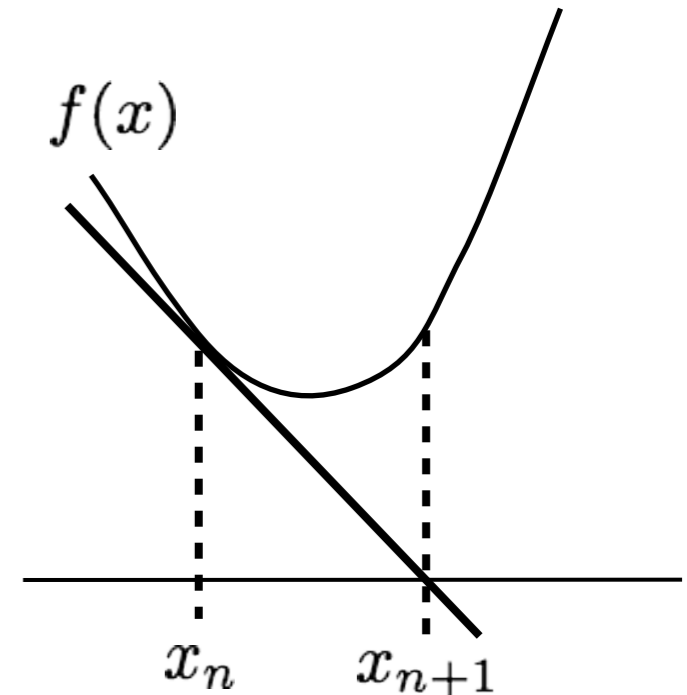
ニュートン法(2)

- もちろん、右図のように、ニュートン法が必ず解にたどりつくわけではない。
- その場合でもニュートン法は簡単には死なない。残差の2乗和 $S = y^2$ はニュートン法の示す方向への小さな動きに対して常に減少する：

$$\begin{aligned} \Delta y^2 &\approx 2y \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \cdot \Delta x \\ &= -2\alpha y^2 < 0 \quad \left(\alpha y = - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \cdot \Delta x \right) . \end{aligned}$$

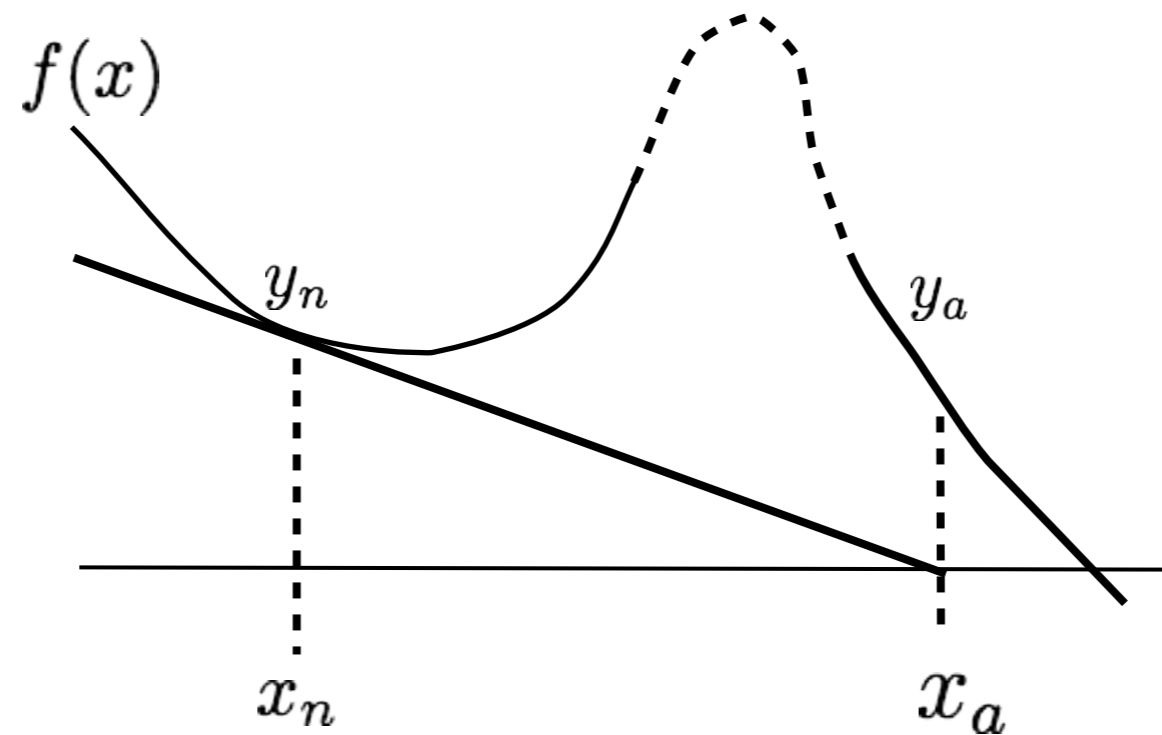
- 更に、ある α に対して、 S が元より増加してしまった場合にも、その状況を最高3次関数で近似し、最小の S にたどり着く α_m を推定する事が出来る：

$$\begin{aligned} y(x) &\approx y_n + y'_n \Delta + a\Delta^2 + b\Delta^3 \\ \Delta_m &= x_m - x_n = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ay'_n}}{3a} \end{aligned}$$



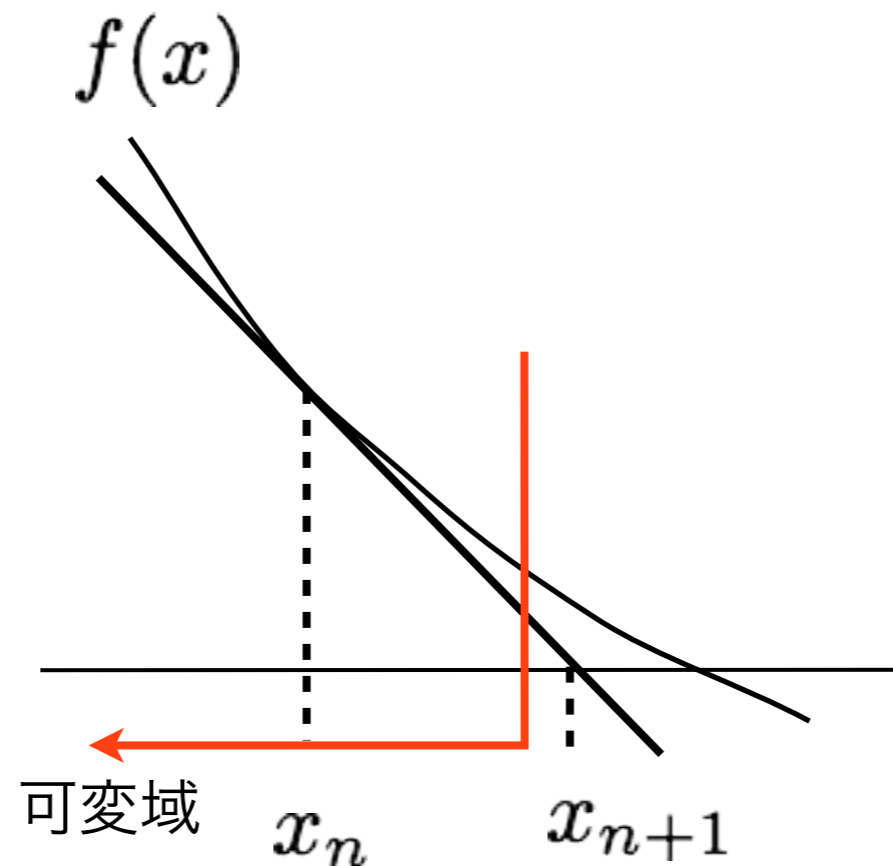
ニュートン法(3)

- 一般にその点が局所最小値かどうか、他により良い点があるかどうかを判定する方法はない。しかしニュートン法では、右図のように局所最小値に近づくと、自ずと遠方のより解に近い領域に飛び出せる可能性がある。



ニュートン法(4)

- ・ 実際にしばしば起こる問題は、図のように、解のところまで変数の可変域がない場合である。
- ・ この状況は変数の数が十分あれば、各変数を可変域の限界から少し遠ざけた点から再出発する事により、別の解に到達できる可能性がある。



Matching Procedure of SAD/FFS

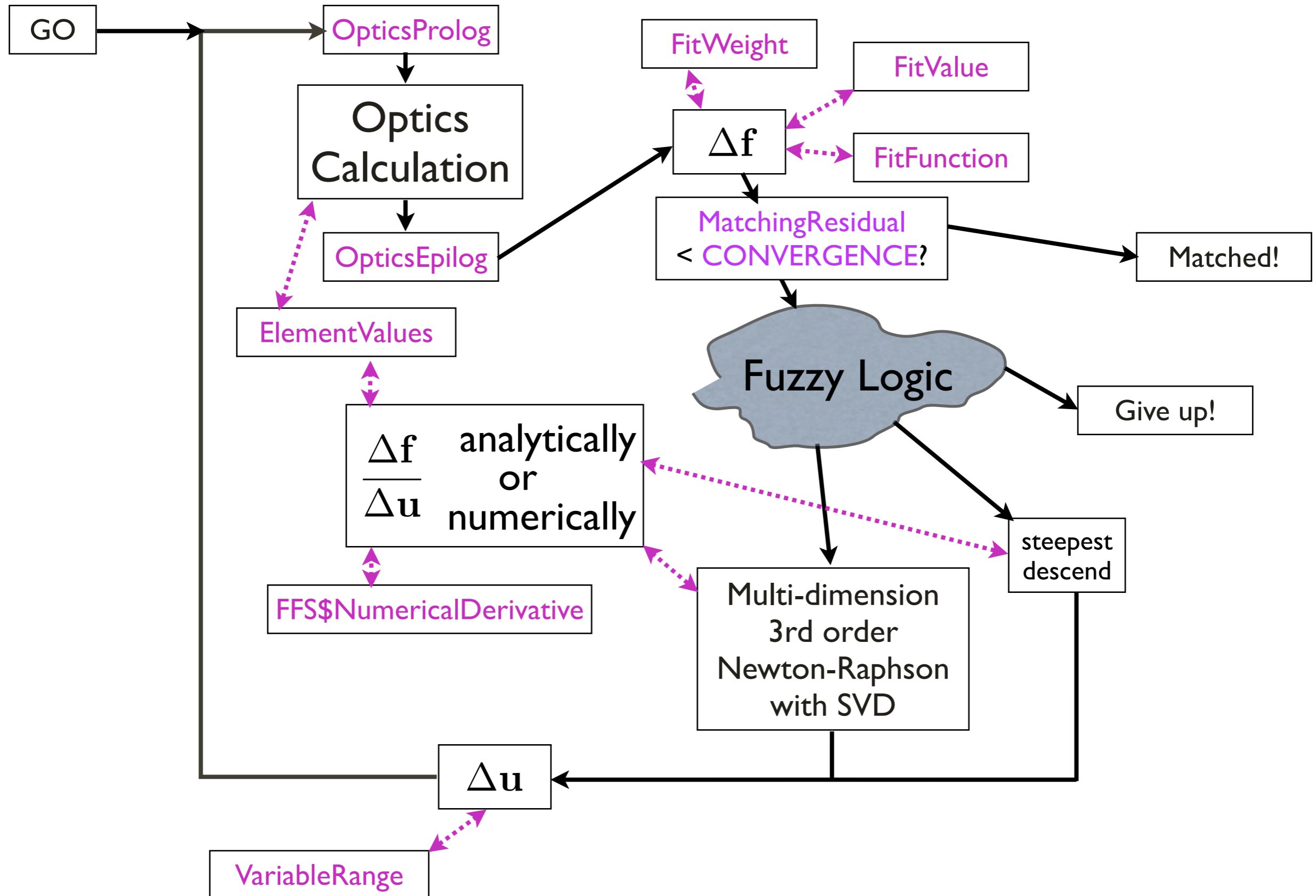


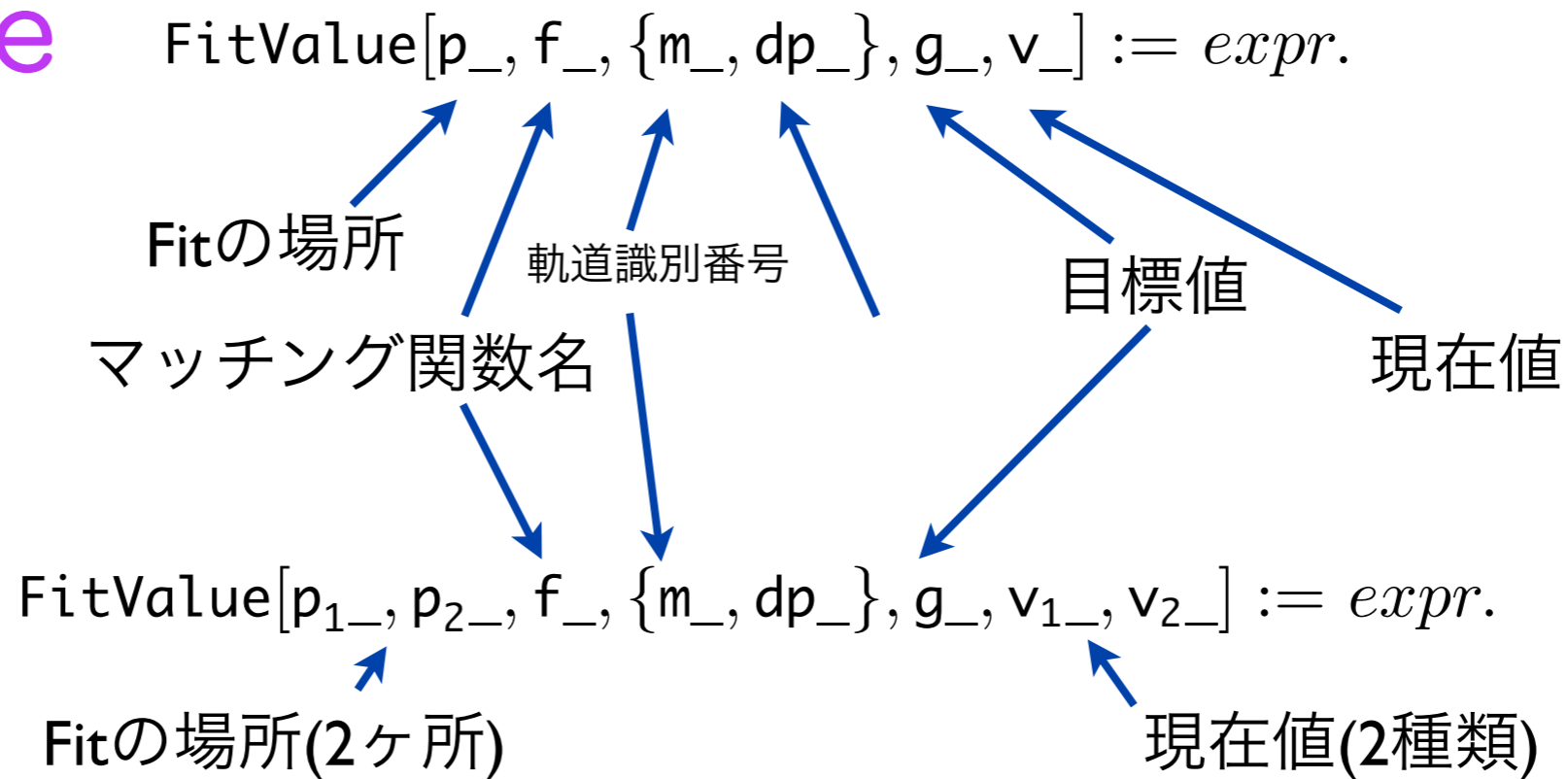
Table 1: Built-in Matching Functions of SAD

AX	α_x	BX	β_x	NX	$\psi_x(/2\pi)$		
AY	α_y	BY	β_y	NY	$\psi_y(/2\pi)$		
EX	η_x	EPX	η_{px}	EY	η_y	EPY	η_{py}
R1	R_1	R2	R_2	R3	R_3	R4	R_4
DX	Δx	DPX	Δp_x	DY	Δy	DPY	Δp_y
PEX	$\eta_{x,\text{phys}}$	PEPX	$\eta_{px,\text{phys}}$	PEY	$\eta_{y,\text{phys}}$	PEPY	$\eta_{py,\text{phys}}$
TRX	$\text{Tr}(x)$	TRY	$\text{Tr}(y)$	LENG	s		
GX	G_x	GY	G_y	GZ	G_z		
CHI1	χ_1 (deg)	CHI2	χ_2 (deg)	CHI3	χ_3 (deg)		

微分係数

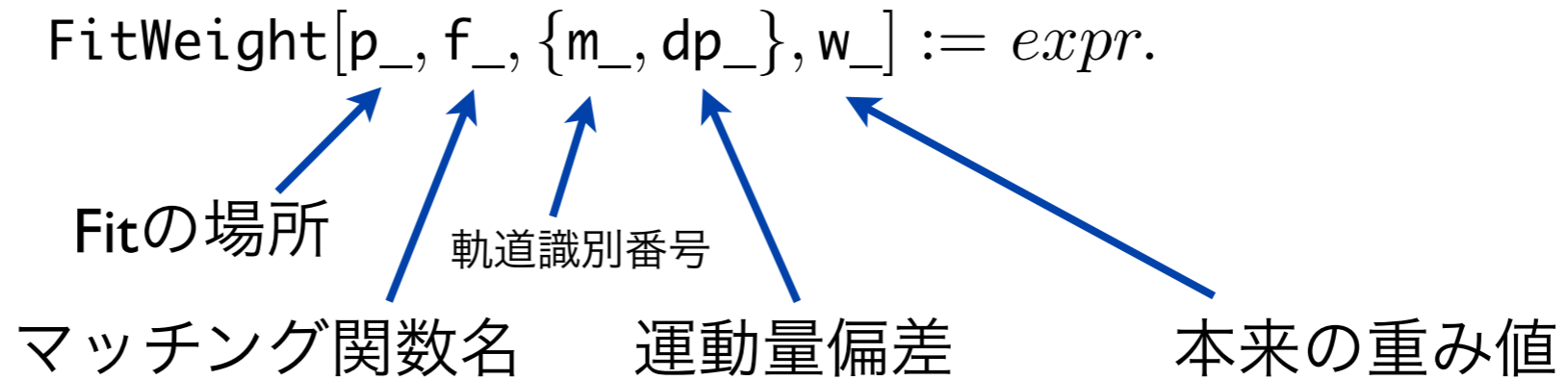
- マッチングの対象になる光学関数には、パラメータによる微分が解析的に求まるものがある：
 - QUAD の K1 による $\alpha, \beta, \psi, \eta$, coupling の変化。ただし、QUAD に軌道オフセットがない場合に限る。
 - BEND の K0 による軌道の変化。
- しかし、以下のものを含め、一般には解析的な表現を得ることは困難：
 - BEND の K0 による $\alpha, \beta, \psi, \eta$, coupling の変化。
- SAD では可能ならば解析的な式を用い、それ以外は数値微分（有限差分）を用いる。
- ただし、`FFS$NumericalDerivative = True` の場合は常に数値微分を用いる。

FitValue



- 関数 **FitValue** は、 マッチングの関数の目標値を自由に設定するためのものである。
- 戻り値は、 数値の場合目標値として使われる。
- Null が戻されると、 マッチングから除外する。
- 目標値をある範囲内に収めたり、 運動量依存性を持たせる場合などに用いられる。
 - FitValue["PSEXT" , "EX" , _ , g_ , v_] := If[v < g, g, Null];
場所 PSEXT での EX の最小値を g に設定する。
 - FitValue["IP" , "NX" , _ , dp_ , g_ , v1_ , v2_] := (nx0 + xix * dp)*2*Pi;
場所 IP での NX の chromaticity を xix に合わせる。

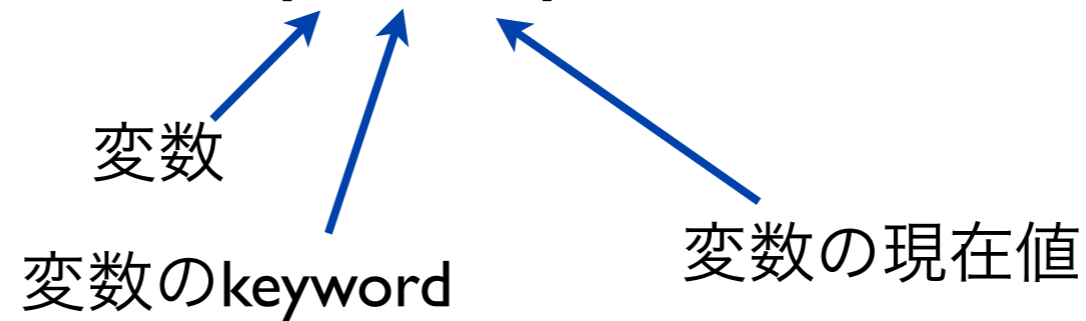
FitWeight



- 関数 `FitWeight` は、マッチングの関数の最小化の重みを設定します。
- 戻り値は、重みです。
- 非数値が戻されると、本来の重みが使われます。
 - `FitWeight["PSEXT", "AX" | "BX" | "EX", _, w_] := w/3;`
場所 PSEXT での AX, BX, EX の重みを本来の値の 1/3 にします。
- マッチングや最小化においては、dimension の異なる量を同時に扱うため、必ずそれらの重み付けが必要になります。SAD ではそれぞれの変化量が各点でのビームサイズに及ぼす比率で重み付けをします。したがって、マッチングの結果、 β 関数などが変化すると、重みも変わり、`MatchingResidual` の値が変わることがあります。

VariableRange

VariableRange[e_, k_, v_] := *expr*.



- 関数 **VariableRange** は、マッチングの変数の可変域を指定します。特に Default variable 以外の keyword を変数とする場合に使います。
- 戻り値は、True、False、または {min, max} です。
- True/False の場合は現在値が可変域内にある / ないことを、{min, max} は上下限を示します。
 - VariableRange["Q1", "L", _] := {1, 3};
Q1 の長さが 1 m と 3 m の間で可変であることをしめす。
 - VariableRange["Q1", "L", v_] := 1 <= v <= 3;
も同様だが、前者の方が良い。

FitFunction

FitFunction := *expr*.

- 関数 **FitFunction** は、備え付けのマッチング関数以外の一つまたは複数の式をゼロにするために用います。
- *expr* は実数 (または実数のリスト) を返す関数 (または関数のリスト) です。
 - FitFunction := {(Emittances/.(e=Emittance[]))[[1]]/2e-8 - 1, (MomentumCompaction/.e)/1e-4 - 1};
Horizontal エミッタンスを 2×10^{-8} m に、momentum compaction factor を 1×10^{-4} にします (重みは相対誤差を最小にするようにしています)。

実例(DBAセル)

dba.sad

- ラティス、要素定義:

```
OFF LOG ECHO;
MOMENTUM=3 GEV;
;
DRIFT  LINS      =(L =5 )      L05      =(L =.5 )
        LA       =(L =8 )      L1       =(L= 1)
;
BEND   B1        =(L =2      ANGLE =.1 )
;
QUAD   QF2       =(L =.5     K1 =.15 )
        QD        =(L =.5     K1 =-.15 )
        QF1       =(L =.5     K1 =.15 )
;
SEXT   SF        =(L =.5)
        SD        =(L =.5)
;
MARK   I1 = (OFFSET = 1.5)
        I2 = (OFFSET = -0.5)
;
LINE  DBA = (I1 QF2 LINS B1 L05 QD L1 LA SF L05 QF1
            L1 LA SD L05 QD L05 B1 LINS QF2 I2)
;
```

実例(DBAセル)(2)

- Linear Optics Matching:

```
;  
FFS USE=DBA;  
norfsw cell;  
  
fit ex 0 epx 0 bxm 40 bym 40 ny 0.12;  
free q* la b1 b1 l;  
  
VariableRange["LA", "L", _]={1, 10}; (* la min 1 max 10; *)  
VariableRange["B1", "ANGLE", _]={0, 0.2}; (* b1 min 0 max 0.2;  
*)  
VariableRange["B1", "L", _]={1, 3};  
  
FitFunction:={(Emittances/.(e=Emittance[]))[[1]]/5e-9-1,  
  (MomentumCompaction/.e)/1e-4-1};  
  
go
```


实例(DBAセル)(3)

- Linear Optics Matching:

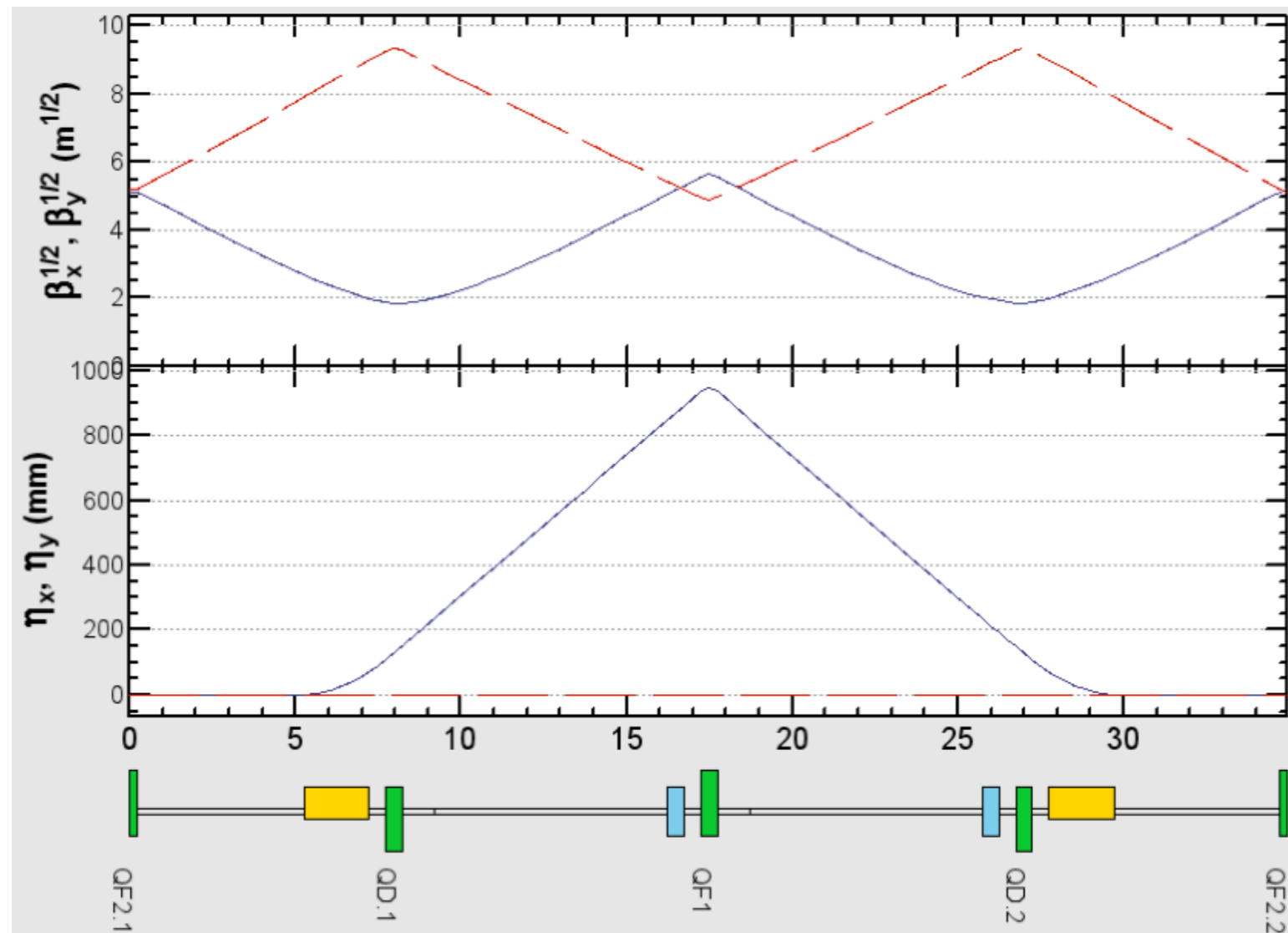
```
go
Unstable transfer matrix
...
Unstable transfer matrix
  3  16  1.9095E+06 (NEWTON)  -1.551
Unstable transfer matrix
...
Unstable transfer matrix
  4   4  4.1750E+05 (NEWTON)   1.164
  5   1  164.2      (NEWTON)  -3.9302E-04
Unstable transfer matrix
Unstable transfer matrix
  7  16  88.41      (NEWTON)   6.384
  9  64  70.16     (NEWTON)   12.21
 10  16  12.67     (NEWTON)   12.11
 16  41  11.91     (NEWTON)   0.9874
 25  23  10.53     (NEWTON)   0.6672
 31   1  5.3841E-02 (DESCEND)
 33   1  3.1730E-03 (NEWTON)  -5.8932E-02
 34   1  8.7909E-05 (NEWTON)  -2.7706E-02
Matched. ( 5.2480E-10) DP = 0.01000  DP0 = 0.00000  ExponentOfResidual = 2.0
OffMomentumWeight = 1.000
$$$      f AX      ##### # -1.78E-15 $$$      f BXM  40          1  27.112252
$$$      f NX      ##### #  .672203 $$$      f AY      ##### # -2.22E-15
$$$      f BYM  40          1  26.425358 $$$      f NY      .12          1  .120002
$$$      f EX      0          1  8.3297E-9 $$$      f EPX  0          1  -7.05E-18
$$$      f LENG  ##### #  34.951975 $$$      f FUN1  0.0        1  1.4413E-6
$$$      f FUN2  0.0        1  1.7416E-7
```

实例(DBAセル)(4)

- Linear Optics Matching:

Var	Keyword	Now	!	Previous	Saved	Minimum	Maximum	Couple	Coefficient
!Variable									
QF2	K1	.204638713712	!	.150000000	.150000000	-1.00000E10	1.00000E10	<--	1.00000000
B1	L	1.962147058402	!	2.000000000	2.000000000	1.00000000	3.00000000		1.00000000
B1	ANGLE	.073122623343	!	.100000000	.100000000	.00000000	.20000000	<--	1.00000000
QD	K1	-.111913000238	!	-.150000000	-.150000000	-1.00000E10	1.00000E10	<--	1.00000000
LA	L	7.013840210297	!	8.000000000	8.000000000	1.00000000	10.00000000	<--	1.00000000
QF1	K1	.185295346292	!	.150000000	.150000000	-1.00000E10	1.00000E10	<--	1.00000000

draw bx by & ex ey q*;



实例(DBAセル)(5)

In[14]:= emit

Closed orbit:

	x	px/p0	y	py/p0	z	dp/p0
Entrance :	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
Exit :	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000

Extended Twiss Parameters:

AX: -9.7E-16	BX: 27.11225	ZX: 2.65E-23	EX: 8.330E-9
PSIX: -4.3E-17	ZPX: 1.24E-24	EPX: 9.88E-17	
R1: .000000	R2: .000000	AY: -7.5E-15	BY: 26.42535
R3: .000000	R4: .000000	ZY: .000000	EY: .000000
		PSIY: .000000	ZPY: .000000
		EPY: .000000	
		AZ: .000000	BZ: 1.000000
		PSIZ: .000000	

Units: B(X,Y,Z), E(X,Y), R2: m | PSI(X,Y,Z): radian | ZP(X,Y), R3: 1/m

Design momentum	P0 = 3.0000000 GeV	Revolution freq.	f0 = 8577268.0 Hz
Energy loss per turn	U0 = .0062154 MV	Effective voltage	Vc = .0000000 MV
Equilibrium position	dz = .0000000 mm	Momentum compact.	alpha = 1.0000E-4
Orbit dilation	dI = .0000000 mm	Effective harmonic #	h = .0000000
Bucket height	dV/P0 = .0000000		

Imag.tune:	-0.0000000	0.0000000	0.0000000
Real tune:	-0.3277965	0.1200022	-0.0000000

Damping per one revolution:

X : -1.034972E-06 Y : -1.035895E-06 Z : -2.072712E-06

Damping time (sec):

X : 0.112648 Y : 0.112547 Z : 5.624865E-02

Tune shift due to radiation:

X : 6.266443E-14 Y : 4.585154E-13 Z : 5.765025E-10

Damping partition number:

X : 0.9991 Y : 1.0000 Z : 2.0009

Emittance X	= 5.00001E-9 m	Emittance Y	= .00000000 m
Emittance Z	= .00000000 m	Energy spread	= 4.95974E-4
Bunch Length	= .00000000 mm	Beam tilt	= .00000000 rad
Beam size xi	= .36818671 mm	Beam size eta	= .00000000 mm

实例(DBAセル)(6)

- Chromaticity Correction:

```
save;  
rej total;  
FitFunction=.;
```

```
fix * free s*;  
fit i2 nx @ 5 ny @ 5;
```

```
xix=0.05;  
xiy=0.05;  
FitValue["I2", "NX", {_, dp_}, g_, _] := g + xix * dp * 2 * Pi;  
FitValue["I2", "NY", {_, dp_}, g_, _] := g + xiy * dp * 2 * Pi;  
go
```

实例(DBAセル)(7)

```

go
  2  1  3.6602E-07 (NEWTON)  1.8642E-03
  3  1  3.4400E-07 (NEWTON)  0.2676
****qcod---> Closed orbit not found
***qmdiag---> Sum resonance: (TrA-TrB)^2 =           NaN
***qtwiss---> Overflow
...
****qcod---> Closed orbit not found
 20  1  3.4397E-07 (NEWTON)  2.1396E+04
****qcod---> Closed orbit not found
***qmdiag---> Sum resonance: (TrA-TrB)^2 =           NaN
***qtwiss---> Overflow
...
                               NaN
***qtwiss---> Overflow
Residual = 3.4397E-07  DP = 0.01000  DP0 = 0.00000  ExponentOfResidual = 2.0
OffMomentumWeight =  1.000
      DP      -.010000  -.005000  .000000  .005000  .010000
      Res.     1.428E-7  7.139E-9  1.74E-29  1.351E-8  1.805E-7
I2      f NX   .6722    5   .671464  .671901  .672203  .672375  .672420
I2      f NY   .12     5   .119674  .119792  .120002  .120298  .120674
$$$     AX   #####    #   -.011620  -.005674  -2.2E-15  .0
$$$     BX   #####    #   26.01932  26.56836  27.11225  27.
$$$     NX   #####    #   .671464  .671901  .672203  .6
$$$     AY   #####    #   -.074979  -.037130  -2.2E-15  .0
$$$     BY   #####    #   26.48664  26.46590  26.42535  26.
$$$     NY   #####    #   .119674  .119792  .120002  .1
$$$     LENG #####    #   34.951975

```

