

軌道補正について

M. Kikuchi

November 2, 2011

1 Response Matrix

この解説においては、特に断らない限り、リングを仮定する。また、閉軌道は非線形磁場によるキックが無視できるほど小さいものとし、一個のキックによる閉軌道の変化はキックの大きさに比例するものとする。

1.1 1自由度

リングの一点 s_1 から他の点 s_2 への転送行列は、よく知られているように、振幅を表す行列 B と位相の進みを表す回転行列 R の積の形で表現される。

$$M_{2 \leftarrow 1} = B_2^{-1} R(\psi_2 - \psi_1) B_1 \quad (1)$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos(\psi_2 - \psi_1) + \alpha_1 \sin(\psi_2 - \psi_1)) & \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin(\psi_2 - \psi_1) \\ -\frac{(\alpha_2 - \alpha_1) \cos(\psi_2 - \psi_1) + (1 + \alpha_1 \alpha_2) \sin(\psi_2 - \psi_1)}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} & \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} (\cos(\psi_2 - \psi_1) - \alpha_2 \sin(\psi_2 - \psi_1)) \end{pmatrix} \quad (2)$$

行列 B 、 R はそれぞれ

ノーマルモードへの変換 \longrightarrow $B_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\beta_i}} & 0 \\ \frac{\alpha_i}{\sqrt{\beta_i}} & \sqrt{\beta_i} \end{pmatrix} \quad (3)$

$$P_X = \frac{\alpha x + \beta p_x}{\sqrt{\beta}} \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4)$$

で与えられる。

リングの一箇所において、厚さゼロのステアリングでキックを与えたとき、これによって生じる閉軌道は、図1の如くになる。ステアリングの場所以外では自由なベータatron振動をするが、ステアリングの前後でその位相が跳ぶ。軌道が閉じる条件から、 M_1 を s_1 から s_1 への一周の転送行列としたとき

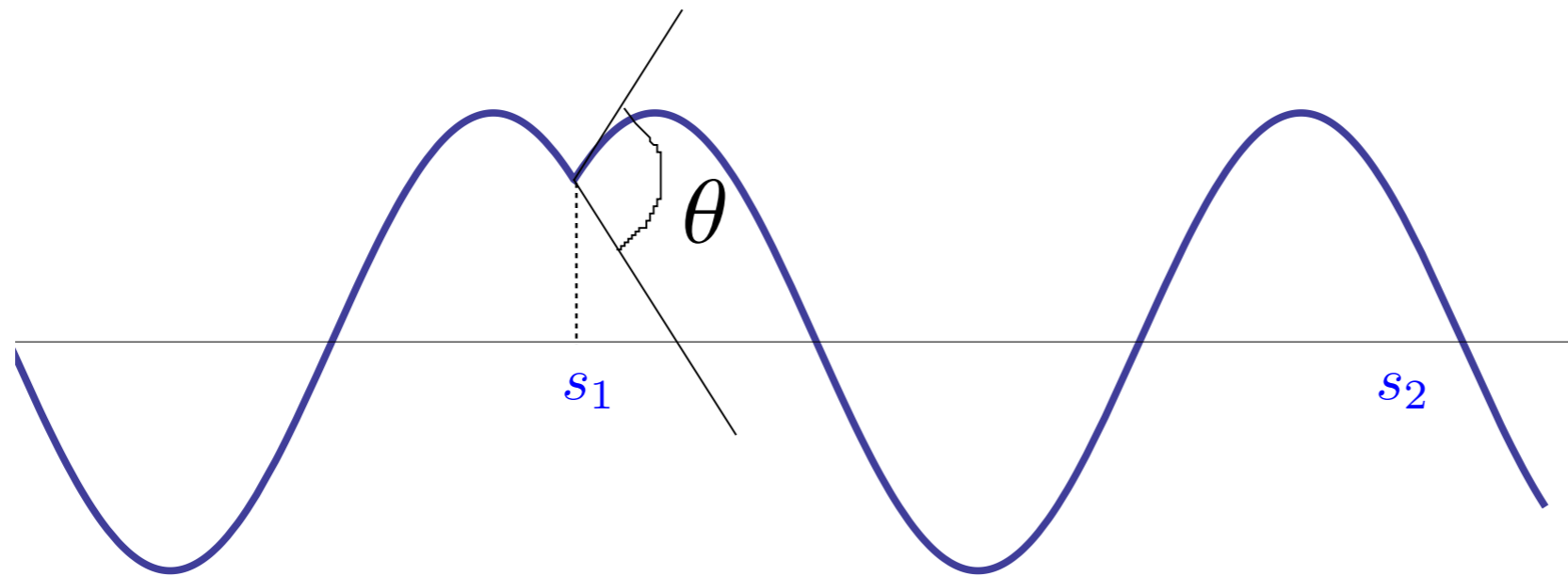


Figure 1: COD due to a single kick

$$M_1 \begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}_1 \quad (5)$$

が成り立たなければならない。ここで $(x, p_x)_1$ は ステアリング出口 (それを s_1 とする) の座標である。式 (5) より、

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}_1 = (I - M_1)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}. \quad (6)$$

式 (6) の両辺を θ で微分して $\theta = 0$ と置いたときの $(x, p_x)_1$ はキックに対する閉軌道の変化率、即ちキックに対する閉軌道の応答を表す。即ち s_1 での応答は

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}_1 = (I - M_1)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

と表される。

$\frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}_1$ をあらためて

$\begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}_1$ と置いた

次に、 $(I - M_1)^{-1}$ を具体的に求める。 M_1 は式 (2) から一周の位相の進みを ψ として、

$$M_1 = B_1^{-1} R(\psi) B_1 \quad (8)$$

と表される。これから

$$\begin{aligned} (I - M_1)^{-1} &= B_1^{-1} (I - R(\psi))^{-1} B_1 \\ &= -\frac{1}{2 \sin \psi/2} B_1^{-1} R(-\psi/2 - \pi/2) B_1 \end{aligned} \quad (9)$$

が得られる。ここで、回転行列の関する次の公式を使った。

公式 $R(\alpha) - R(\beta) = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} R\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (10)$

$$R(\alpha) + R(\beta) = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} R\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (11)$$

これは三角関数の和積の公式に過ぎないが、回転行列の和差もまた回

転行列になるという意味で有用である。証明は補遺 A を参照のこと。

さて他の場所 s_2 での応答は、 s_1 での応答と s_1 から s_2 への転送行列から求めることができる。簡単のために $\boldsymbol{x} = (x, p_x)^t$ と書くことにすると、

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{x}_2 &= M_{2\leftarrow 1} \boldsymbol{x}_1 = M_{2\leftarrow 1} (I - M_1)^{-1} (0, 1)^t \\
 &= -\frac{1}{2 \sin \psi/2} B_2^{-1} R(\psi_2 - \psi_1) B_1 (B_1^{-1} R(-\psi/2 - \pi/2) B_1) (0, 1)^t \\
 &= -\frac{1}{2 \sin \psi/2} B_2^{-1} R(\psi_2 - \psi_1) R(-\psi/2 - \pi/2) B_1 (0, 1)^t \\
 &= -\frac{1}{2 \sin \psi/2} B_2^{-1} R(\psi_2 - \psi_1 - \psi/2 - \pi/2) B_1 (0, 1)^t. \quad (12)
 \end{aligned}$$

したがって s_2 での応答は、 s_1 から s_2 への転送行列 $M_{2\leftarrow 1}$ (の第 2 列) とほとんど等しい。違いは、

- 係数 : $-\frac{1}{2 \sin \psi/2}$

- 位相： $\psi_2 - \psi_1$ の代わりに $\psi_2 - \psi_1 - \psi/2 - \pi/2$

である。上の議論で s_1 から s_2 へ転送行列で結ぶ際に $\psi_2 > \psi_1$ を仮定していた。ステアリングの場所で位相が不連続になるので、ステアリングの「上流」側へは直接転送行列で結ぶことはできないからである。実際の数値計算においては位相の原点はどこか一箇所に固定して計算することが普通である。この場合にも対応できる表式は実際上有用である。位相原点固定の場合、 s_2 がステアリングから「下流」側に向かって一周する途中で位相の原点を通過し、 $\psi_2 < \psi_1$ となる場所が出てくる。このときにも式 (12) を適用するためには、 $\psi_2 \rightarrow \psi + \psi_2$ とせねばならない。即ち、 $\psi_2 < \psi_1$ のとき $\psi_2 - \psi_1 - \psi/2 - \pi/2 \rightarrow \psi_2 - \psi_1 + \psi/2 - \pi/2$ とする。これから

$$\begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} (\psi_2 - \psi_1 - \psi/2 - \pi/2) = - \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} (\psi/2 - (\psi_2 - \psi_1)) \quad (\psi_2 > \psi_1)$$

$$\begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} (\psi_2 - \psi_1 + \psi/2 - \pi/2) = - \begin{pmatrix} \cos \\ -\sin \end{pmatrix} (\psi/2 + (\psi_2 - \psi_1)) \quad (\psi_2 < \psi_1)$$

以上から、 s_1 のキックによる s_2 での応答は

$$\boldsymbol{x}_2 = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

と書いたとき、

$$N = \frac{1}{2 \sin \psi/2} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (S + \alpha_1 C) & \sqrt{\beta_1 \beta_2} C \\ -\frac{1}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} [(\alpha_2 - \alpha_1)S + (1 + \alpha_1 \alpha_2)C] & \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} (S - \alpha_2 C) \end{pmatrix} \quad (14)$$

(2)式でsinをcos、cosをsinに置き換えたものに
ほぼ等しい

で与えられる。ここで C 、 S は

$$C = \cos(\psi/2 - |\psi_2 - \psi_1|) \quad (15)$$

$$S = \text{sgn}(\psi_2 - \psi_1) \sin(\psi/2 - |\psi_2 - \psi_1|) \quad (16)$$

である。 N の第 1 列すなわち $N(1,0)^t$ は、オフセットに対する閉軌道応答を表す。図 2 を参照。

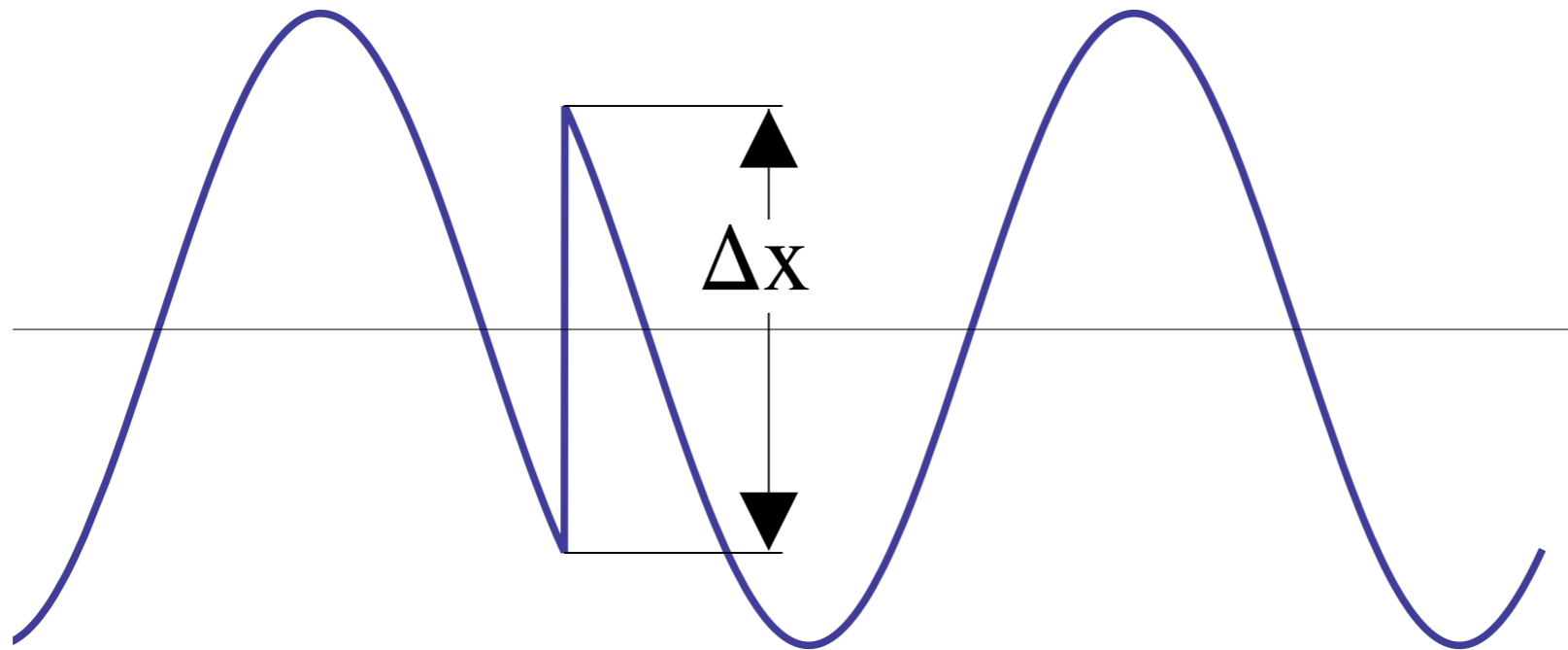


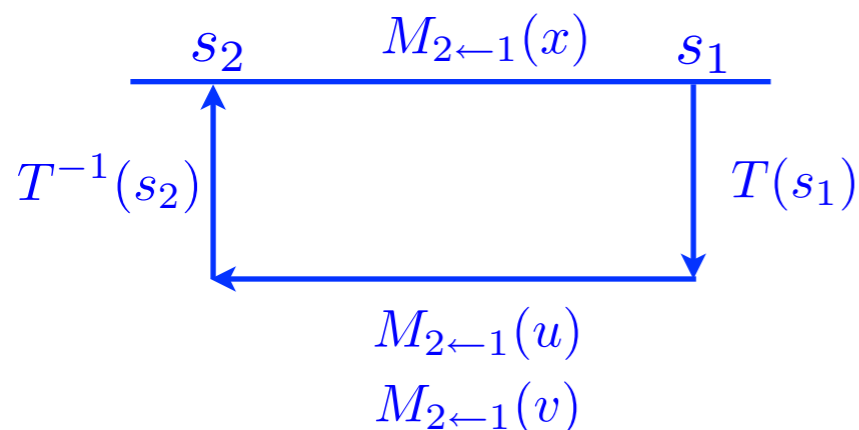
Figure 2: COD due to a single offset

このオフセット応答はもちろん実際の電磁石で実現されるわけではないが、次節に述べるように、2自由度間にカップリングがある場合の閉軌道応答の計算に用いられる。

1.2 2自由度

x 、及び y の2自由度の場合、一般的には2自由度間のカップリングがあるために、転送行列は基準モードへの変換行列と基準モードでの転送行列の積の形にかける。

$$M_{2\leftarrow 1}(\mathbf{x}) = T_2^{-1} \begin{pmatrix} M_{2\leftarrow 1}(\mathbf{u}) & 0 \\ 0 & M_{2\leftarrow 1}(\mathbf{v}) \end{pmatrix} T_1 \quad (17)$$



と書ける。 T は物理座標から基準座標への変換行列であり、SAD で用いられている表示では

$$T = \begin{pmatrix} \mu I & JR^t J \\ R & \mu I \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

あるいは、

$$T = \begin{pmatrix} \mu & 0 & -r_4 & r_2 \\ 0 & \mu & r_3 & -r_1 \\ r_1 & r_2 & \mu & 0 \\ r_3 & r_4 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \mu^2 + \det R = 1. \quad (19)$$

$M_{2 \leftarrow 1}(\mathbf{u})$ 及び $M_{2 \leftarrow 1}(\mathbf{v})$ は基準モード $\mathbf{u} = (u, p_u)$ 、 $\mathbf{v} = (v, p_v)$ の転送行列であり、式 (2) で与えられる。 s_1 における物理座標での水平方向キック $(0, 1, 0, 0)^t$ は、基準座標では $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_1^t \equiv (u, p_u, v, p_v)_1^t = T_1(0, 1, 0, 0)^t = (0, \mu, r_2, r_4)_1^t$ となり \mathbf{v}

モードでのオフセットを含んだものとなる。基準座標での閉軌道は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} N_u & 0 \\ 0 & N_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}_1 \quad (20)$$

となる。ここで N_u 、 N_v は 1 自由度応答 (式 (14)) である。 $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_2$ を T_2^{-1} で物理座標に引き戻したものが物理座標での閉軌道となる。

即ち水平方向キックによる閉軌道応答は

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \end{pmatrix}_2 = T_2^{-1} \begin{pmatrix} N_u & 0 \\ 0 & N_v \end{pmatrix} T_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

で与えられる。垂直方向キックの場合も同様である。

1.3 2.5 自由度

この節では進行方向の運動 (z, δ) を考慮に入れる。進行方向の運動とはいっても、リングの各点での (z, δ) ではなく周長と平均エネルギーの二つを対象とする。

水平方向のステアリングによる水平方向の閉軌道を考える。ステアリングが多数あるとして、 s_i における x 座標は、

$$x_i = \sum_j a_{ij} \theta_j \quad (22)$$

と書ける。ここで a_{ij} は式 (21) における N の (1, 2) 成分である。 θ_j は s_j におけるステアリングのキック角である。この閉軌道による周

分散は $x'' + Kx = \frac{1}{\rho}$ の周期解

長の伸び ΔC は

$$\begin{aligned} \Delta C &= \sum_i \frac{x_i l_i}{\rho_i} = \sum_{i,j} \frac{l_i}{\rho_i} a_{ij} \theta_j = \sum_j \left(\sum_i \frac{l_i}{\rho_i} a_{ij} \right) \theta_j \\ &= \sum_j \left(\sum_i a_{ji} \frac{l_i}{\rho_i} \right) \theta_j = \sum_j \eta_j \theta_j \end{aligned} \quad (23)$$

となる。ここで η_j は水平方向分散である。上の導出では $a_{ij} = a_{ji}$ なる性質を使っているが、これが水平垂直結合があっても成り立つことは補遺 B で示される。式 (23) により、分散のある場所でキックすると周長が伸びることになる。

RF 加速があり周長の伸びが実質的に許されないリングでは、式 (23) で与えられる周長の伸びがなくなるように、運動量に変化する。運動量の変化 δ は周長を C 、運動量縮約率を α とすれば、

$$\delta = -\frac{1}{\alpha} \frac{\Delta C}{C} = -\frac{1}{\alpha C} \sum_j \eta_j \theta_j \quad (24)$$

となる。この運動量変化による閉軌道の変化は $\eta_i \delta$ であるから、閉軌道は結局

$$x_i = \sum_j \tilde{a}_{ij} \theta_j \quad (25)$$

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{1}{\alpha C} \eta_i \eta_j \quad (26)$$

となる。逆に式 (25)(26) で与えられる軌道においては周長の変化は、次に示すように零である。

$$\begin{aligned} \Delta C &= \sum_i \frac{x_i l_i}{\rho_i} = \sum_j \left[\sum_i \frac{l_i}{\rho_i} \left(a_{ij} - \frac{1}{\alpha C} \eta_i \eta_j \right) \right] \theta_j \\ &= \sum_j \eta_j \theta_j - \frac{1}{\alpha C} \sum_j \eta_j \theta_j \sum_i \frac{\eta_i}{\rho_i} l_i \\ &= \sum_j \eta_j \theta_j - \frac{1}{\alpha C} \sum_j \eta_j \theta_j \alpha C = 0 \quad (27) \end{aligned}$$

式 (25)(26) の軌道応答は、偏向磁石での軌道が零でないことに由来する周長の伸びを吸収せんがために生じる運動量変化を考慮したものである。これとは別にキックの総和が零でないことに由来する運動量変化が考えられる。即ち、ある点で水平方向キック θ を加えるとす。正味の偏向角が $-\theta$ だけ 2π よりも増えてしまうが、これを相殺せんとして運動量が増える。この運動量変化は

$$\frac{2\pi - \theta}{1 + \delta} = 2\pi \quad \longrightarrow \quad \delta = -\frac{\theta}{2\pi} \quad (28)$$

となる。この運動量変化による軌道を取り入れた閉軌道応答は

$$x_i = \sum_j \tilde{a}_{ij} \theta_j - \frac{\eta_i}{2\pi} \theta_j \quad (\text{誤}) \quad (29)$$

で与えられる、と考えるかもしれないがこれは誤りである。何となれば、式 (29) による周長の変化は、第 1 項による寄与は零なので、

$$\Delta C = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i,j} \frac{\eta_i l_i}{\rho_i} \theta_j = -\frac{\alpha C}{2\pi} \sum_j \theta_j = \alpha C \delta \quad (30)$$

となり、運動量変化による周長の変化と一致する。しかし周長の変化は零でなければならないので、実は式 (29) の第 2 項は零でなければならない。単に設計エネルギーが $\delta = -\sum_j \theta_j / 2\pi$ だけ変化するだけであって、それによる軌道は発生しないのである。

補遺

A 回転行列の和差の公式

複素数全体 \mathbb{C} と $K = \{rR(\theta) | r, \theta \in \mathbb{R}\}$ は対応 $\varphi : re^{i\theta} \mapsto rR(\theta)$ により体として同型になるので、複素数で考えてよい。

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} - e^{i\beta} &= \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} = 2i \sin \frac{\alpha - \beta}{2} e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \\ &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} e^{i\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}} \end{aligned}$$

より、

$$R(\alpha) + R(\beta) = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} R\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (\text{A1})$$

$$R(\alpha) - R(\beta) = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} R\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (\text{A2})$$

が成り立つ。(K が体であることは (A1)(A2) から導かれるので、以上は正しくは証明ではない。)

B 応答行列の対称性

1 自由度の場合、 s_1 でのキックによる s_2 での軌道応答は、式 (14) で与えられる：

$$N(s_1, s_2) \equiv \frac{1}{2 \sin \psi/2} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (S + \alpha_1 C) & \sqrt{\beta_1 \beta_2} C \\ -\frac{1}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} [(\alpha_2 - \alpha_1)S + (1 + \alpha_1 \alpha_2)C] & \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} (S - \alpha_2 C) \end{pmatrix}$$

上の式で、 s_1 と s_2 を入れ替えると、

$$N(s_2, s_1) = \frac{1}{2 \sin \psi/2} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} (S - \alpha_2 C) & \sqrt{\beta_1 \beta_2} C \\ -\frac{1}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} [(\alpha_2 - \alpha_1)S + (1 + \alpha_1 \alpha_2)C] & -\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (S + \alpha_1 C) \end{pmatrix}.$$

即ち、

$$N(s_2, s_1) = JN(s_1, s_2)^t J \quad (\text{B3})$$

が成り立つ。

2 自由度の場合も同様に、式 (21) から、

$$N(s_1, s_2) \equiv T_2^{-1} \begin{pmatrix} N_u(s_1, s_2) & 0 \\ 0 & N_v(s_1, s_2) \end{pmatrix} T_1 \quad (\text{B4})$$

と書くことにすると、 s_1 と s_2 を入れ替えた式は

$$N(s_2, s_1) = T_1^{-1} \begin{pmatrix} N_u(s_2, s_1) & 0 \\ 0 & N_v(s_2, s_1) \end{pmatrix} T_2.$$

(B3) から

$$\begin{pmatrix} N_u(s_2, s_1) & 0 \\ 0 & N_v(s_2, s_1) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} N_u(s_1, s_2) & 0 \\ 0 & N_v(s_2, s_1) \end{pmatrix}^t S \quad (\text{B5})$$

$$S = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \quad (\text{B6})$$

が成り立つ。 T は symplectic 行列であり、 $T^{-1} = -ST^t S$ が成り立つ

ことから、

$$\begin{aligned}
N(s_2, s_1)^t &= T_2^t \begin{pmatrix} N_u(s_2, s_1) & 0 \\ 0 & N_v(s_2, s_1) \end{pmatrix}^t (-ST_1 S) \\
&= (-ST_2^{-1} S) \begin{pmatrix} N_u(s_2, s_1) & 0 \\ 0 & N_v(s_2, s_1) \end{pmatrix}^t (-ST_1 S) \\
&= ST_2^{-1} \begin{pmatrix} N_u(s_1, s_2) & 0 \\ 0 & N_v(s_1, s_2) \end{pmatrix} T_1 S \\
&= SN(s_1, s_2) S.
\end{aligned}$$

故に、

$$N(s_2, s_1) = SN(s_1, s_2)^t S \quad (\text{B7})$$

が成り立つ。

$$SN^tS = \begin{pmatrix} -N_{22} & N_{12} & -N_{42} & N_{32} \\ N_{21} & -N_{11} & N_{41} & -N_{31} \\ -N_{24} & N_{14} & -N_{44} & N_{34} \\ N_{23} & -N_{13} & N_{43} & -N_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{B8})$$

であるから、(1, 2)、(2, 1) 成分および (3, 4)、(4, 3) 成分については対称性

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (\text{B9})$$

が成立する。