

# SADの利用 (2)

大西 幸喜

2011.06.29

SAD School

# SADの利用（1）のまとめ

- 転送行列(1→2)によるTwissパラメータの変換.

$$(x, p_x)_2^t = M(x, p_x)_1^t \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle xp_x \rangle \\ \langle xp_x \rangle & \langle p_x^2 \rangle \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \beta_x & -\alpha_x \\ -\alpha_x & \gamma_x \end{pmatrix}$$

ビームに適合化した  
Twissパラメータ

SADのTransferMatrix[]で、返してくれる転送行列を使うと

$$\begin{pmatrix} \beta_x \\ \alpha_x \\ \gamma_x \end{pmatrix}_2 = \frac{\varepsilon_{x,1}}{\varepsilon_{x,2}} \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{21}m_{11} & m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21} & -m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{21}m_{22} & m_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_x \\ \alpha_x \\ \gamma_x \end{pmatrix}_1$$

$$\frac{\varepsilon_{x,1}}{\varepsilon_{x,2}} = \frac{\gamma_2\beta_2}{\gamma_1\beta_1} \quad (\text{注意が必要}) \quad \text{演習：適当なビームラインを作って確認せよ.}$$

- 3種類以上の転送行列と対応するビームサイズ測定があれば、 $(\alpha, \beta, \varepsilon)$ を求めることができる.

$$\varepsilon_2\beta_2 = m_{11}^2(\varepsilon_1\beta_1) - 2m_{11}m_{12}(\varepsilon_1\alpha_1) + m_{22}^2(\varepsilon_1\gamma_1)$$

(測定されたビームサイズ)<sup>2</sup>

ビームに適合したTwissパラメータ： $(\alpha_1, \beta_1)$

$$\gamma\beta - \alpha^2 = 1$$

# SADの利用（1）のまとめ

- SADは厚物を取り扱える道具.
  - 四極磁石-ドリフト-ワイヤーでthin lens近似(Qの厚み0)の場合
    - ビームサイズはK値の二次関数
    - 係数からTwissパラメータとエミッタンスを得る.
    - しかし、SADを使えば、より正確
- 基本的なビーム光学系の適合化
  - フィットの条件、変数の指定、 マッチング関数、 等

# SADの利用 (2)

1. Off-momentum matching
2. Particle tracking simulation

# Off-momentum Matching

- 運動量のずれた粒子に対して、チューン、Twissパラメータ等のマッチングをすることが可能。
  - chromaticity, chromatic Twiss parameters, ...
- 色収差
  - 運動量のずれによるビーム光学系のずれ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ K_1 \delta & 1 \end{pmatrix} \quad \text{四極成分が運動量によって変化する効果を、}$$

リングのある場所に入れる。

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ K_1 \delta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix}$$

$$\text{tr} \tilde{M} = 2 \cos \tilde{\mu} = 2 \cos \mu + K_1 \beta \delta \sin \mu \quad \tilde{\mu} = \mu + \Delta \mu$$

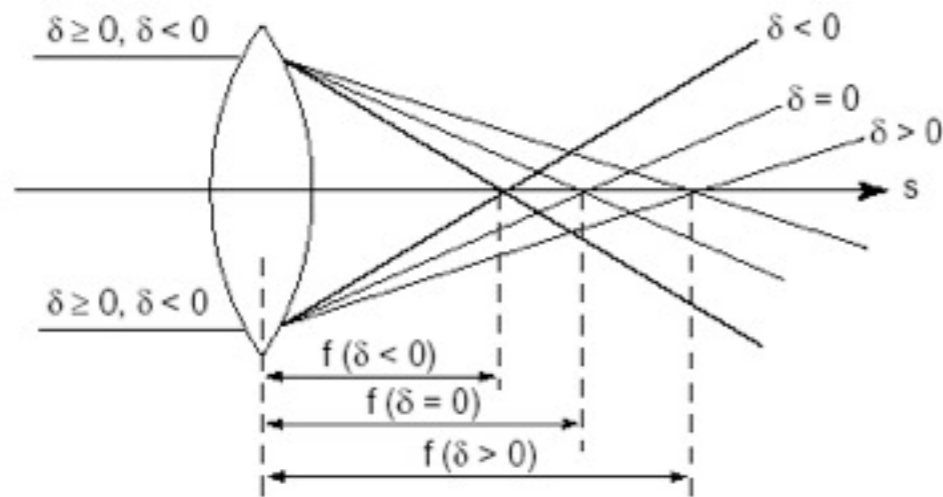
$$\xi \equiv \frac{\Delta \mu}{2\pi \delta} = -\frac{\beta}{4\pi} K_1 \quad \cos(\mu + \Delta \mu) - \cos \mu = -\Delta \mu \sin \mu$$

ベータ関数、四極成分が大きいほど、大きな色収差（クロマチシティ）が発生

# 色収差 (chromaticity)

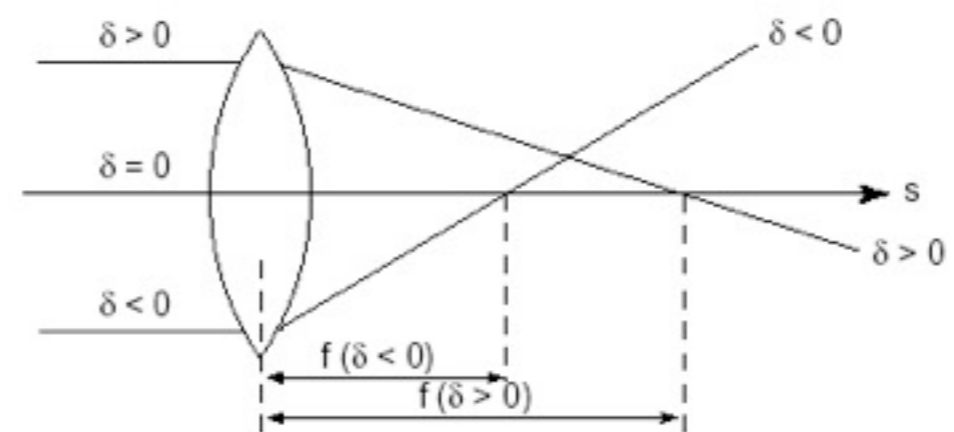
- 色収差とは ➡ 運動量の違いによって収束力に差が生じること

収束四極磁石

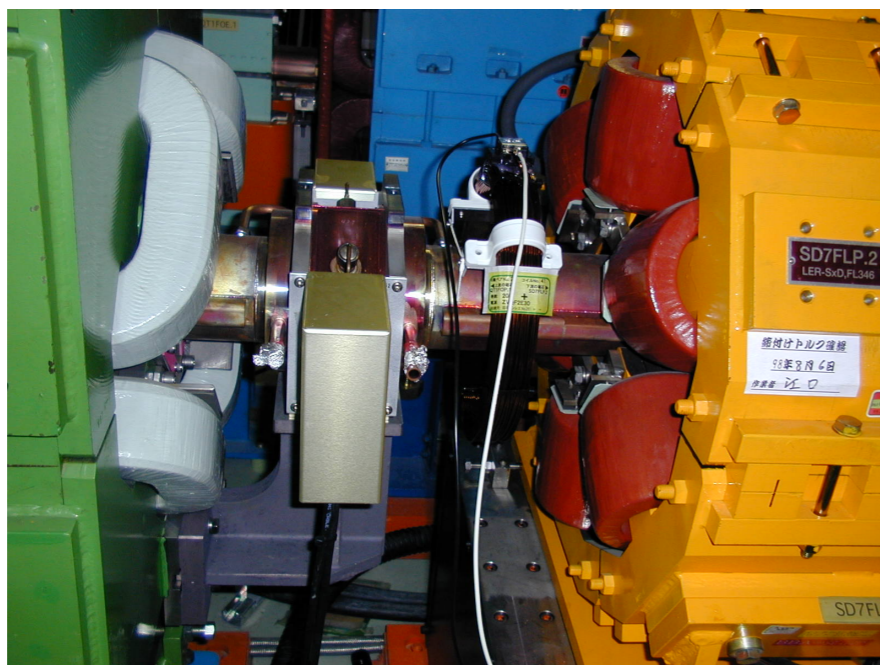


運動量分散なし

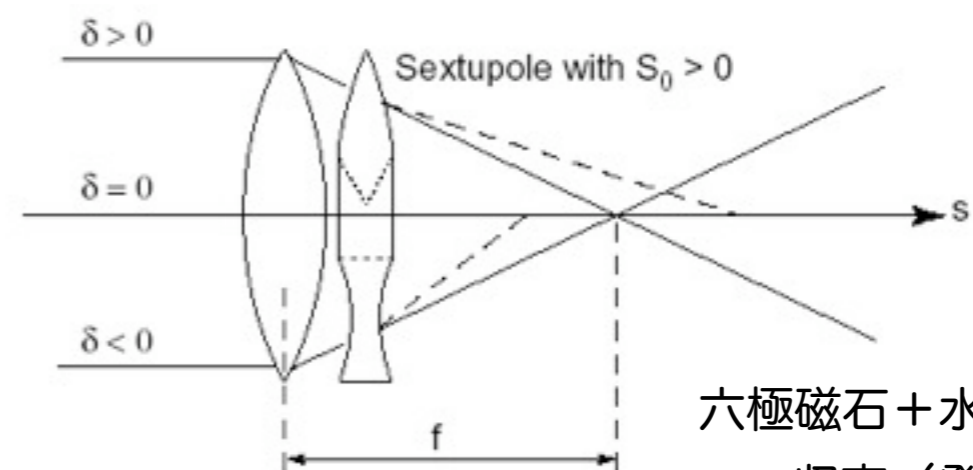
収束四極磁石



運動量分散あり



収束四極磁石 + 六極磁石



六極磁石 + 水平方向COD  
= 収束 (発散) 磁石

# 色収差補正

- 六極磁石 ( $K_2$ ) による色収差補正

$$\xi_x = - \int_C \frac{\beta_x(s)}{4\pi} (K_1(s) - \eta_x(s)K_2(s)) ds \rightarrow 0 \text{ or some value}$$

演習：これを導きなさい。

$$\xi_y = - \int_C \frac{\beta_y(s)}{4\pi} (-K_1(s) + \eta_x(s)K_2(s)) ds \rightarrow 0 \text{ or some value}$$

Twissパラメータの色収差も同様に得られる。

$$\frac{1}{\beta_x(s_0)} \frac{\Delta\beta_x(s_0)}{\delta} = - \int_C \frac{\beta_x(s)\eta_x(s)}{2 \sin \mu_x} \cos(\mu_x - 2(\psi_x(s_0) - \psi_x(s))) K_2(s) ds$$

$$\frac{1}{\beta_y(s_0)} \frac{\Delta\beta_y(s_0)}{\delta} = \int_C \frac{\beta_y(s)\eta_x(s)}{2 \sin \mu_y} \cos(\mu_y - 2(\psi_y(s_0) - \psi_y(s))) K_2(s) ds$$

$$\frac{\alpha_x(s_0)}{\delta} = - \int_C \frac{\beta_x(s)\eta_x(s)}{2 \sin \mu_x} \{ \sin(\mu_x - 2(\psi_x(s_0) - \psi_x(s))) + \alpha_x(s_0) \cos(\mu_x - 2(\psi_x(s_0) - \psi_x(s))) \} ds$$

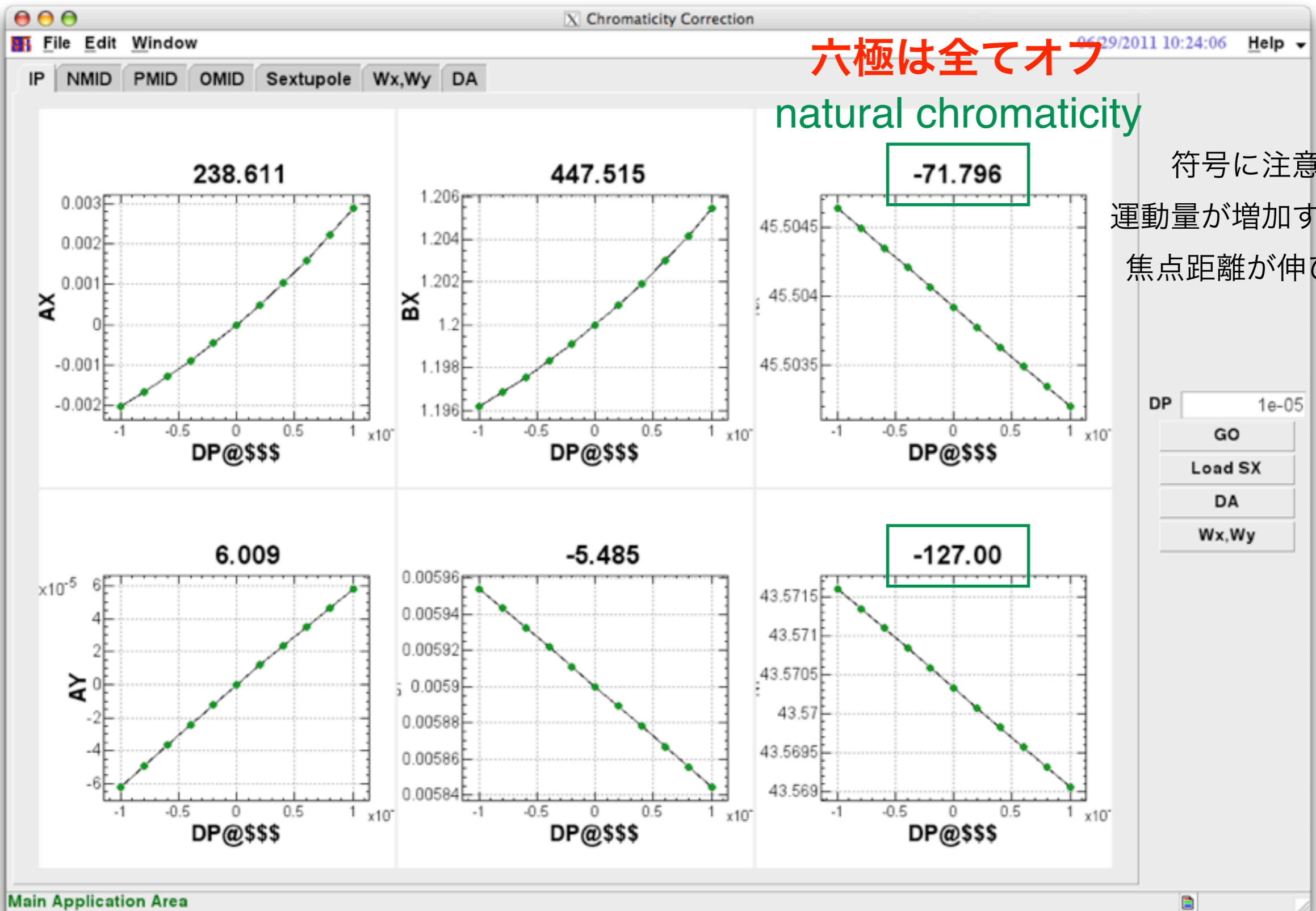
$$\frac{\alpha_y(s_0)}{\delta} = \int_C \frac{\beta_y(s)\eta_x(s)}{2 \sin \mu_y} \{ \sin(\mu_y - 2(\psi_y(s_0) - \psi_y(s))) + \alpha_y(s_0) \cos(\mu_y - 2(\psi_y(s_0) - \psi_y(s))) \} ds$$

演習：これを導きなさい。

(ヒント：ベータ関数の歪み(beta-beat)の式)

# Sample Script: chrom.sad

例題：KEKBのLER



六極は全てオフ

natural chromaticity

符号に注意

運動量が増加すると

焦点距離が伸びる



# クロマティシティの調整

- 7ページの式を利用する.
- 六極のファミリー数に応じて、連立方程式を解いて $K_2$ を求める.
- 2ファミリーでクロマティシティ( $\xi_x, \xi_y$ )なら、 $2 \times 2$ 行列の逆行列の計算に帰着.
- 多数ファミリーで多変数なら、SVD等で連立方程式を解く.  
(LinearSolve[]の利用：SADの利用（1）参照)
- SADのマッチングを利用.

# 運動量のずれた粒子に対する適合化

マッチング条件（クロマティシティ、4箇所 Twissパラメータ）

!	component1	component2	fun	goal-value	np	scale
FIT	\$\$\$		NX	45.50391730	10	! * 6.283185307
FIT	\$\$\$		NY	43.57033212	10	! * 6.283185307
FIT	\$\$\$		AX	-6.3590E-13	10	! * 1.000000000
FIT	\$\$\$		BX	1.200000000	10	! * 1.000000000
FIT	\$\$\$		AY	1.50564E-13	10	! * 1.000000000
FIT	\$\$\$		BY	.005900000	10	! * 1.000000000
FIT	NMID		AX	1.22979E-11	10	! * 1.000000000
FIT	NMID		BX	8.266361514	10	! * 1.000000000
FIT	NMID		AY	-3.4639E-13	10	! * 1.000000000
FIT	NMID		BY	37.26242506	10	! * 1.000000000
FIT	OMID		AX	-4.9455E-11	10	! * 1.000000000
FIT	OMID		BX	29.42131355	10	! * 1.000000000
FIT	OMID		AY	4.34999E-10	10	! * 1.000000000
FIT	OMID		BY	6.988100339	10	! * 1.000000000
FIT	PMID		AX	-1.2555E-10	10	! * 1.000000000
FIT	PMID		BX	15.00000000	10	! * 1.000000000
FIT	PMID		AY	-2.4446E-10	10	! * 1.000000000
FIT	PMID		BY	15.00000000	10	! * 1.000000000

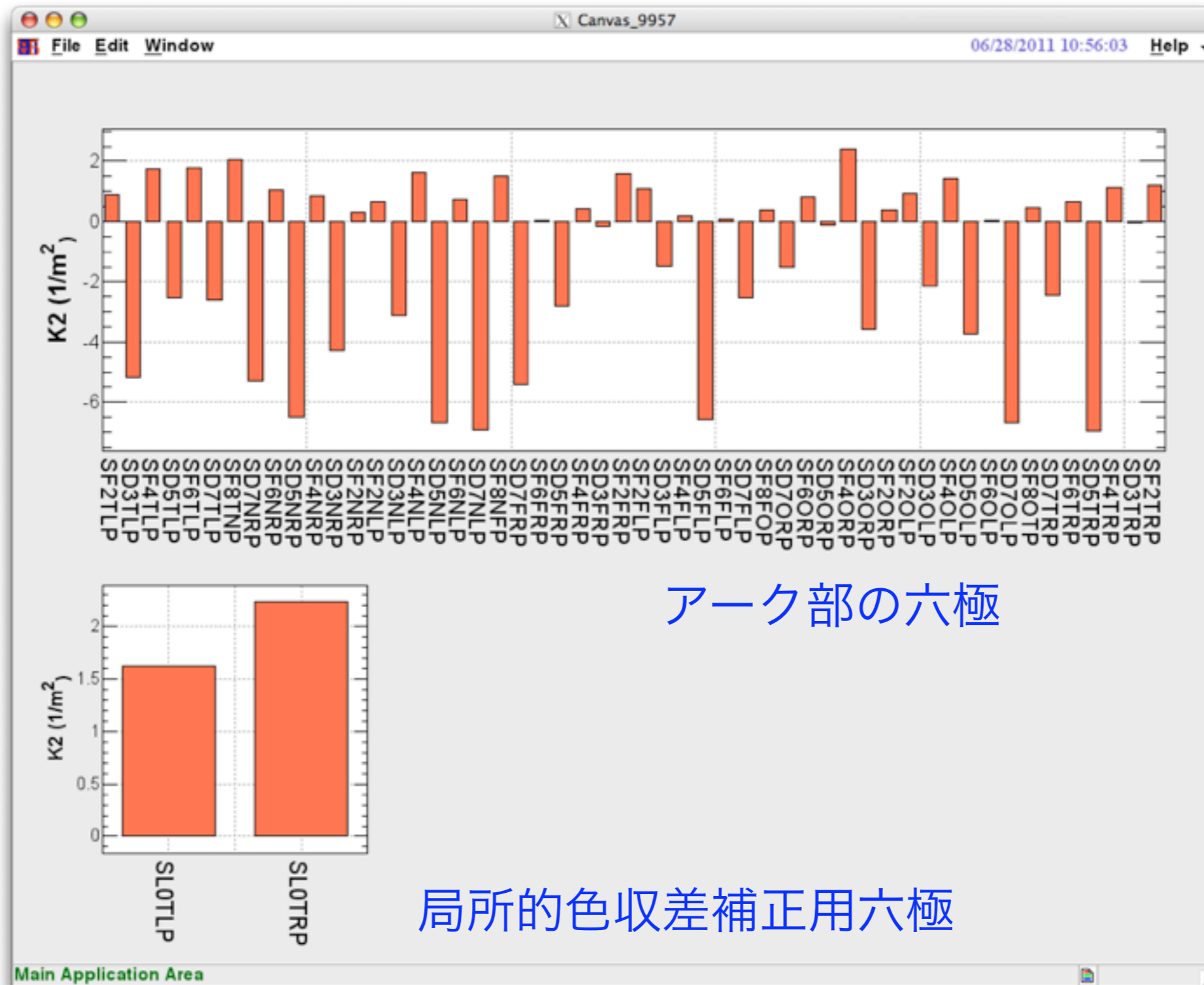
## マッチング変数の指定

```
FREE S{DFL}*;  
  
SD* MIN -7.0;  
SD* MAX -0.04;  
  
SF* MIN 0.04;  
SF* MAX 4.0;  
  
SL* MIN 0.04;  
SL* MAX 4.0;
```

DPを少しずつ増やしなが  
GOする.

初期値として、リニア・クロマティシティを  
調整しておくことも一考.

# 六極磁石の構成

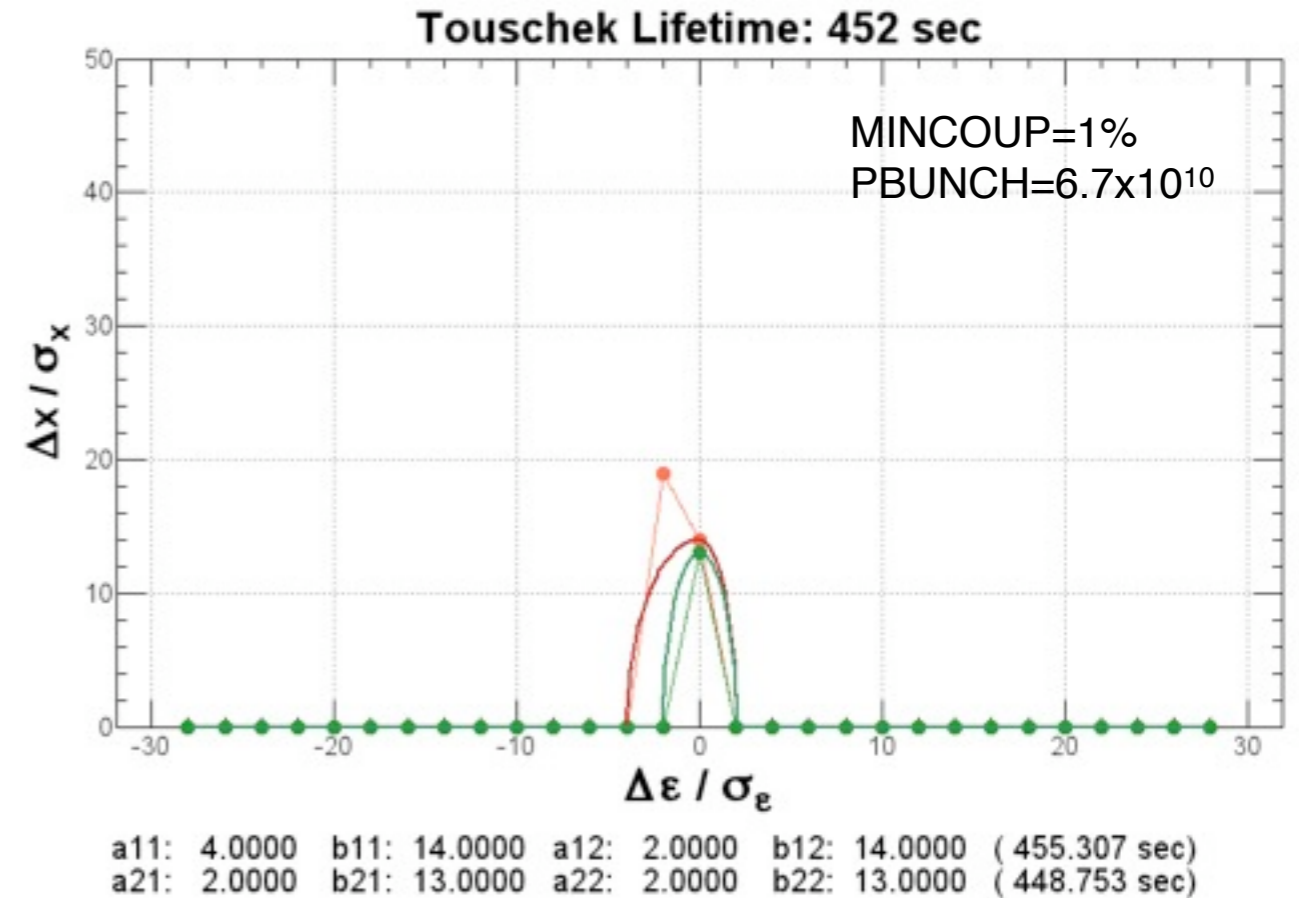


アーク部の六極

局所的色収差補正用六極

# 六極調整の意味

- 色収差の補正
- 非線形キック
- 力学口径
  - 位相空間で、これより内側の点は発散しない領域の境界. dynamic apertureと呼ばれる.
  - 入射効率とTouschek寿命を決める.
  - 非線形力は力学口径狭くするかも.
- 振幅の増加→周長の伸び→見かけ上の運動量のずれ→色収差
  - 基準運動量であっても大振幅粒子の力学口径は保証されない.



六極全てオフの場合の力学口径

色収差補正をしないと、力学口径は狭い.

運動量方向ばかりかon-momentumでも小さい.

# Dynamic Aperture

da=DynamicApertureSurvey[{{0,50}, {0,50\*sqrt[MINCOUP]}}, Table[k,{k,-wz,wz,dz}],  
maxturn, opt, Output->6];

optの例:

PhaseX->Pi/2

```
Maximum number of particles =200
Range      Xmin:    0.000 Xmax:   50.000
           (Ymin:    0.000 Ymax:    5.000)
           Zmin:  -28.000 Zmax:   28.000
Display:   100 turns/character
  NZ      0----!----1----!----2----!----3----!----4----!----5
-28.00   0 111111112000110000000000000000000000000000000000000000000000
-26.00   0 6A44A22111310000001010000000000000000000000000000000000000000000
-24.00   4 AAAA6211110000010000000000000000000000010000000000000000000000000000
-22.00  11 ****AAAAAAA42211100000000000000000000000000000000000000000000000000000
-20.00  13 *****AAAAAAA84211000000000000000000000000000000000000000000000000000000
-18.00   8 *AAAAAAA433362211100000000000000000000000000000000000000000000000000
-16.00  17 *****AAAAAAA611000100000000000000000000000000000000000000000000000000000
-14.00  19 *****AAAAAAA241100000000000000000000000000000000000000000000000000000000
-12.00  22 *****AAAAAAA910000000100000002000000000000000000000000000000000000000000
-10.00  25 *****AAAAAAA210000001111101110000000000000000000000000000000000000000000
-8.00   27 *****AAAAAAA442000001245120030010000000000000000000000000000000000000000
-6.00   27 *****AAAAAAA77AA8A0011AA42A9332210000000000000000000000000000000000000000
-4.00   45 *****AAAAAAA58A21A
-2.00   51 *****AAAAAAA
0.00    51 *****AAAAAAA
2.00   51 *****AAAAAAA
4.00   40 *****AAAAAAA7AA6AAAAAA2
6.00   38 *****AAAAAAA5122211A3220
8.00   34 *****AAAAAAA43131000000131210
10.00  31 *****AAAAAAA2A510210000000111200
12.00  27 *****AAAAAAA3A211000000001320000000
14.00  21 *****AAAAAAA9A5331100020101141000000000000
16.00  19 *****AAAAAAA5A611121110311011000100000000000
18.00  16 *****AAAAAAA33222232100400000000000000000010000
20.00  15 *****AAAAAAA6322110100000000000000100000000000000000
22.00  14 *****AAAAAAA97A16211110000000000001000000000000000000
24.00  12 *****AAAAAAA52113763210000000010000000000000000000000000
26.00   9 **AAAAAAA534A44221111000000010000000000000000000000000000000000
28.00   1 A54335421100100000000100000000000000000000000000000000000000000000000
  NZ      0----!----1----!----2----!----3----!----4----!----5
Score:   648
```

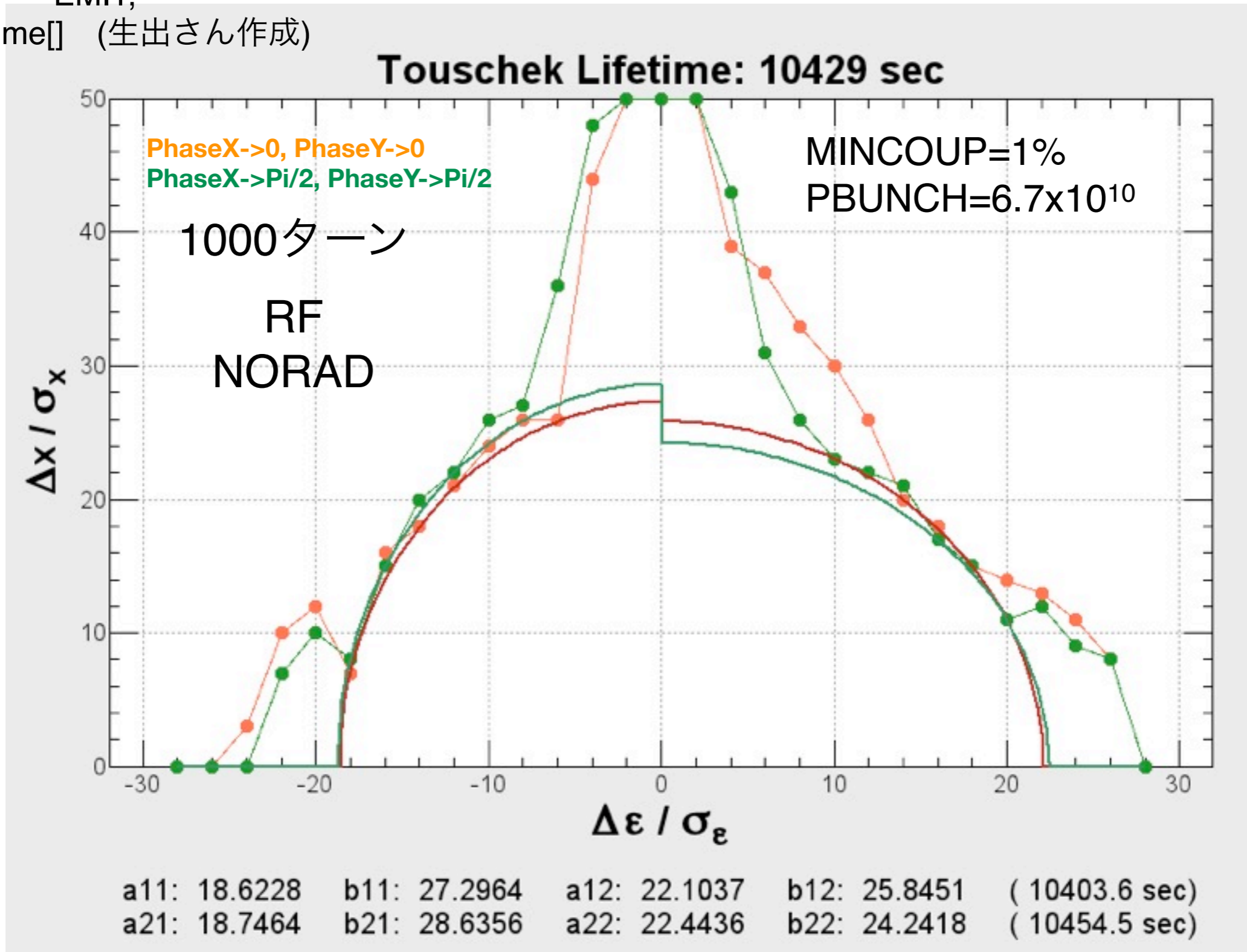
領域を50分割して、  
最大有効初期振幅の大きさが  
0~51の数字で返ってくる。  
(51は50σ以上振幅があるという意味)

chrom.sad  
使用コマンド・関数

# Touschek Lifetime

INTRA;  
EMIT;

PlotLifetime[] (生出さん作成)



# Particle Tracking

- 座標

- 6次元座標

$$(x, p_x, y, p_y, z, \delta)^t \quad z = -v(t - t_0)$$

$$p_x = \frac{p_x}{p_0} \quad p_y = \frac{p_y}{p_0} \quad \delta = \frac{\Delta p}{p_0} \quad \text{scaled canonical momentum}$$

$$H = -\frac{e}{p_0} A_s - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \left\{ (1 + \delta)^2 - \left(p_x - \frac{e}{p_0} A_x\right)^2 - \left(p_y - \frac{e}{p_0} A_y\right)^2 \right\}^{1/2}$$

$$x' = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \frac{p_x - \frac{e}{p_0} A_x}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - \left(p_x - \frac{e}{p_0} A_x\right)^2 - \left(p_y - \frac{e}{p_0} A_y\right)^2}} \simeq \frac{p_x - \frac{e}{p_0} A_x}{1 + \delta}$$

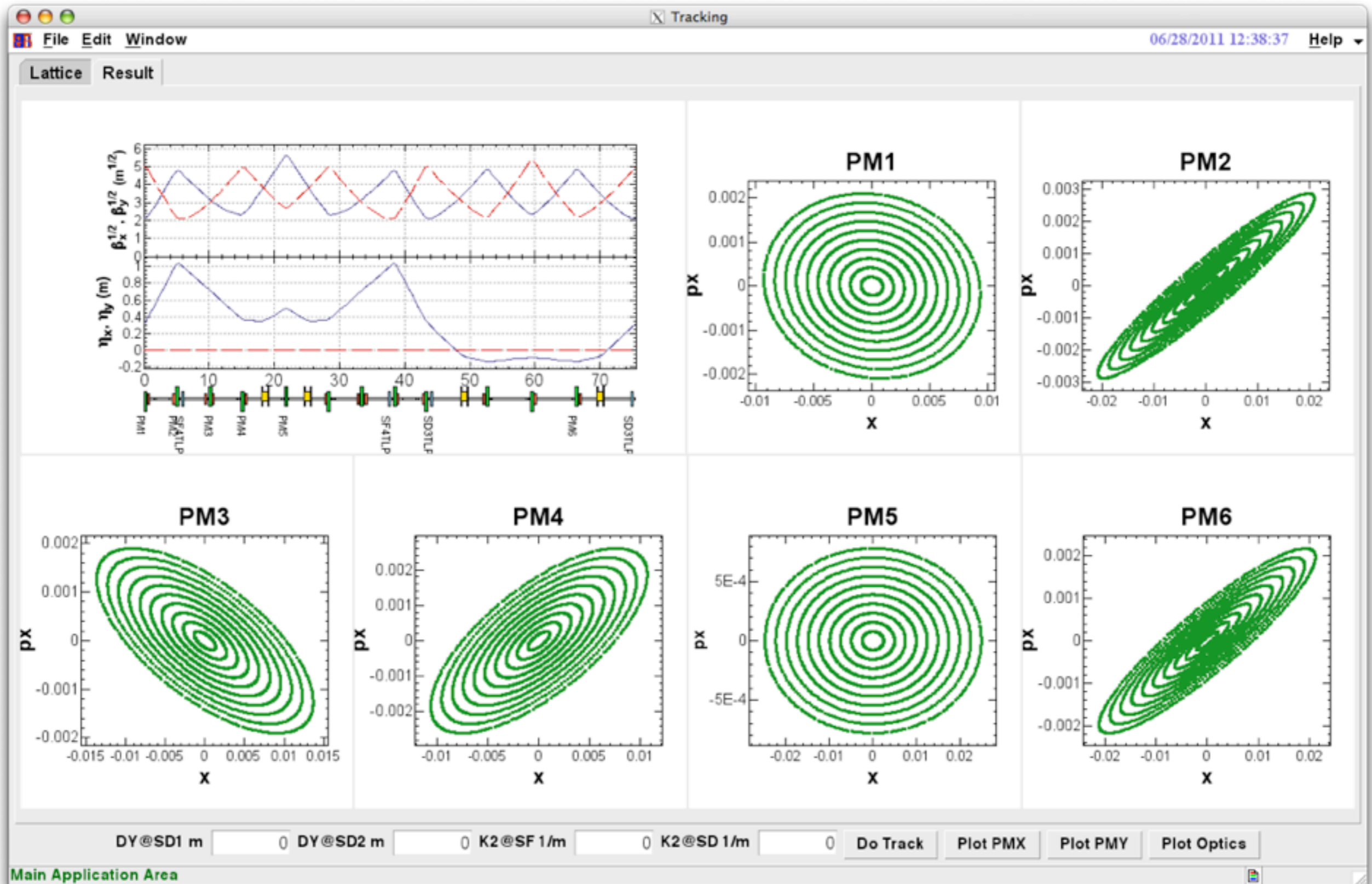
- 基準粒子：(0,0,0,0,0,0). 但し、ソレノイド、K0≠0は注意.

# Sample Script : arc-i.sad

- 例題：KEKBのLERアーク・ラティス.
- 初期振幅を与えて、色々な場所での位相空間プロットを作成する.
- `beam2=TrackParticles[beam1, to, nth]`
  - `beam1={from,{{x},{px},{y},{py},{z},{dp},{flag}}}`
  - `x, px, y, py, z, dp, flag`はリストで与える.
- 六極の $K_2$ 値は、最初0.
- 演習：六極の $K_2$ 値を与えて変化を観察せよ.
- 演習：六極（SD）に垂直オフセットを与えるとどうなるか？
- 演習：SFの $K_2$ を大きくしていくと破綻する。なぜか？

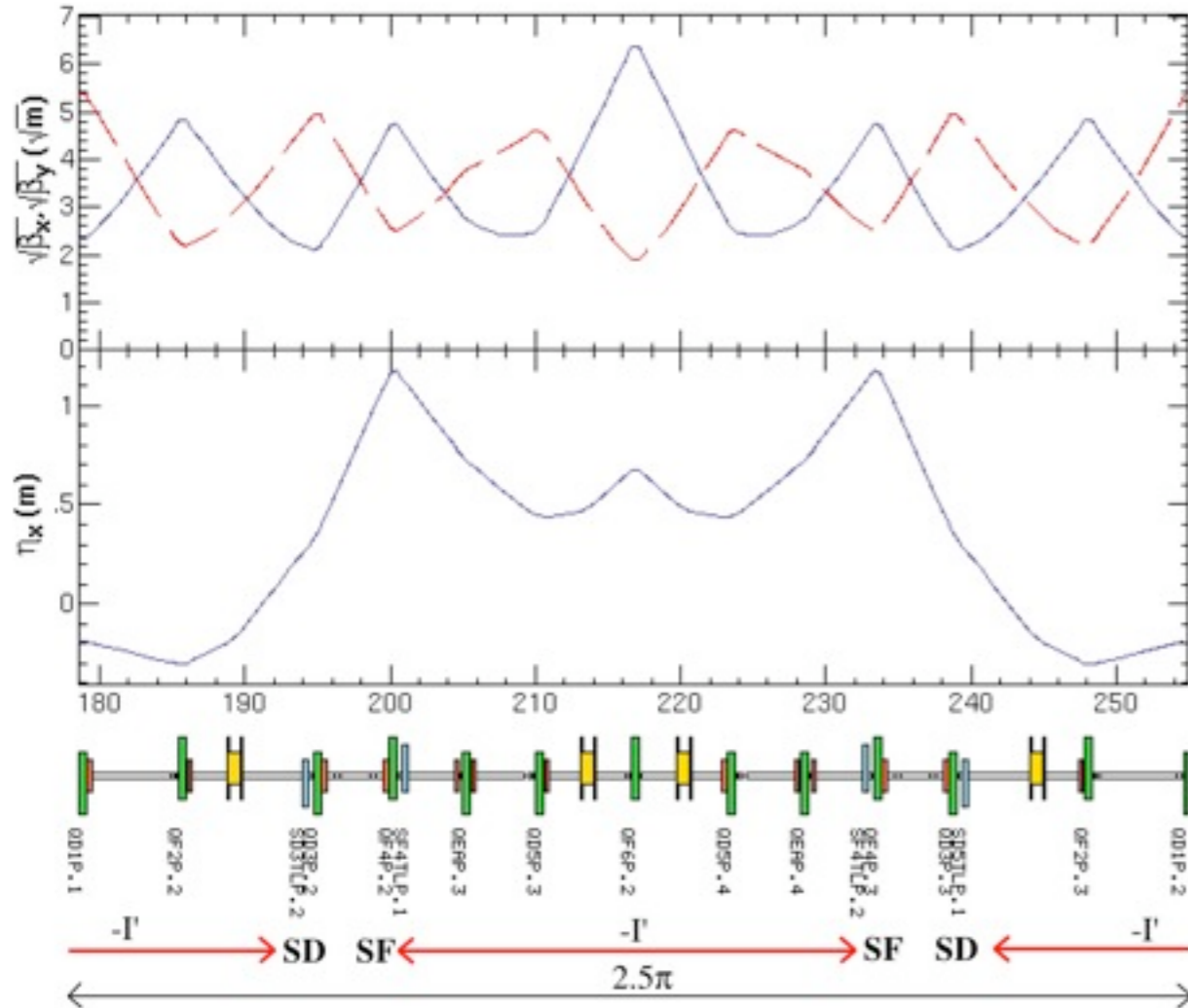


# 位相空間のプロット



# Noninterleaved Chromaticity Correction

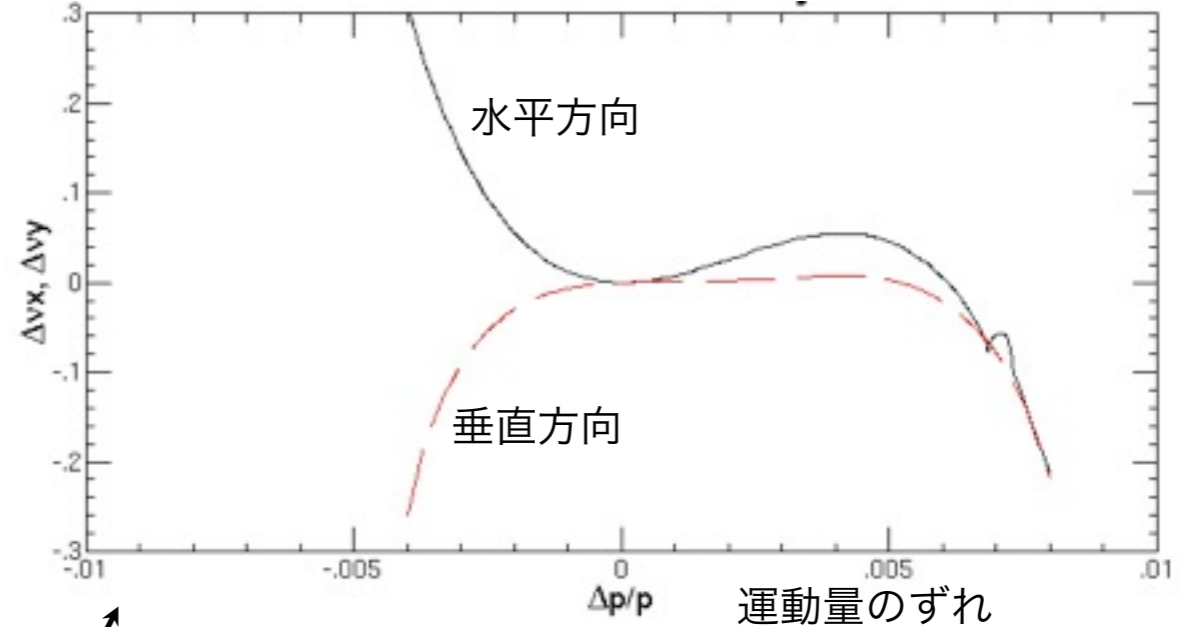
KEKB LER アーク部の1セル



-Iをやめると線形色収差は補正できるが非線形効果のため運動量の大きくずれた粒子に対しては補正できていない。

-Iは良く非線形磁場を打ち消すことができている。

チューンのずれ



ペアの一方の六極をゼロにして他方の強さを2倍にした (-Iを崩した) 場合

チューンのずれ

