

SADの基礎(3)



22 June 2011

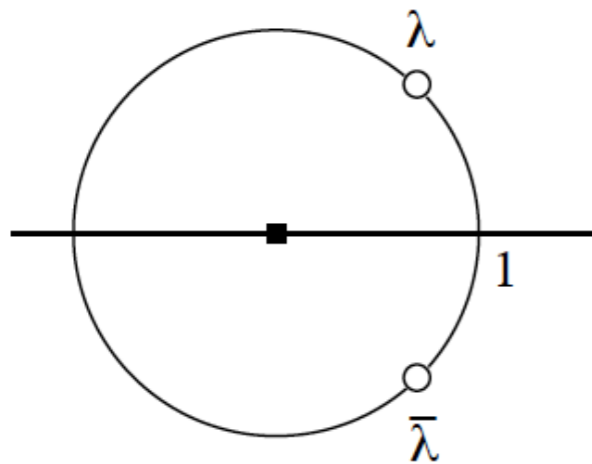
K. Oide (KEK)

前回のまとめ

- エミッタンスとエントロピーの類似性。
- Intrabeam scattering: 自由度間の熱の流れ。
- クラブ空洞: Hamiltonian が有効な一例。
- 独立変数、 s 座標、運動方程式。
- 母関数による変数変換: symplectic 変換の一形態。
- $(t, -E) \rightarrow (z, p)$: より実用的な変数。 $z = -v(t - t_0)$ 。
- ドリフト、ベンド、四極の変換。
- 分散。

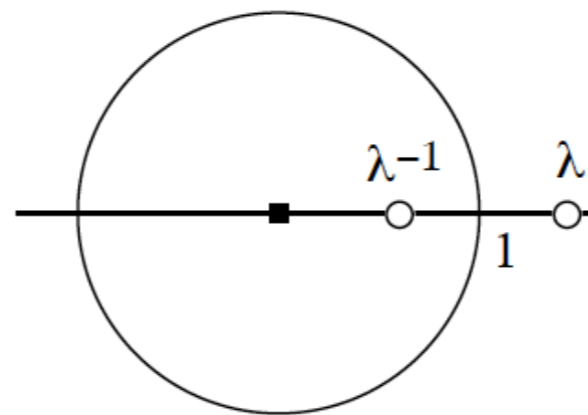
共鳴 resonance

- 線形共鳴： 転送行列が不安定。
- シンプレクティック行列の固有値の分類：
- $\det M = 1$ で M は実数行列。
- λ が固有値なら λ^{-1} も固有値。 λ が固有値なら $\bar{\lambda}$ も固有値。



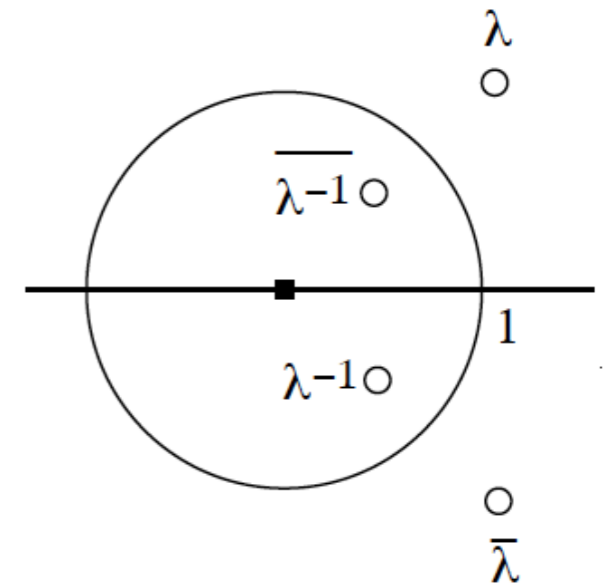
(1) 複素数対 $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$

安定



(2) 実数対

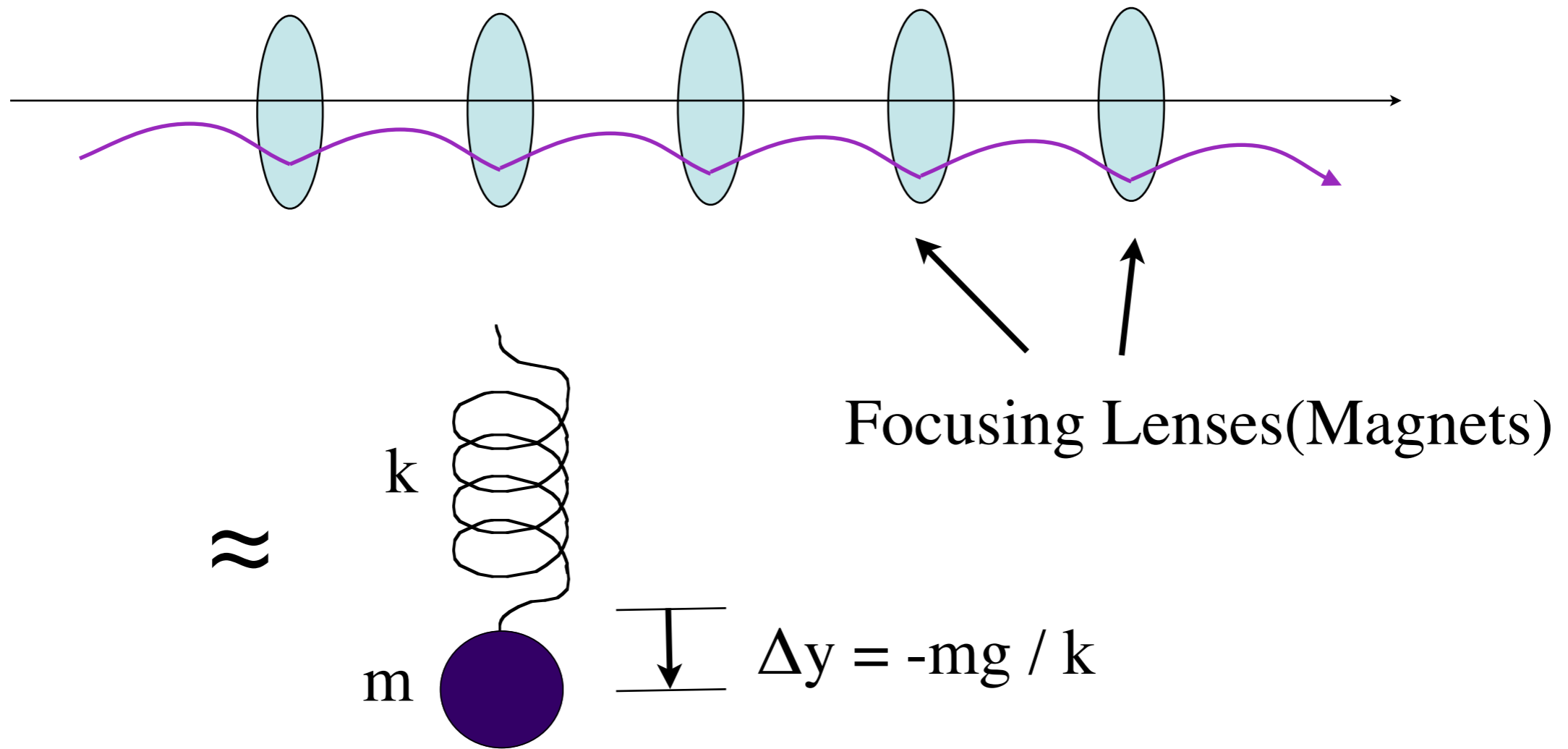
不安定



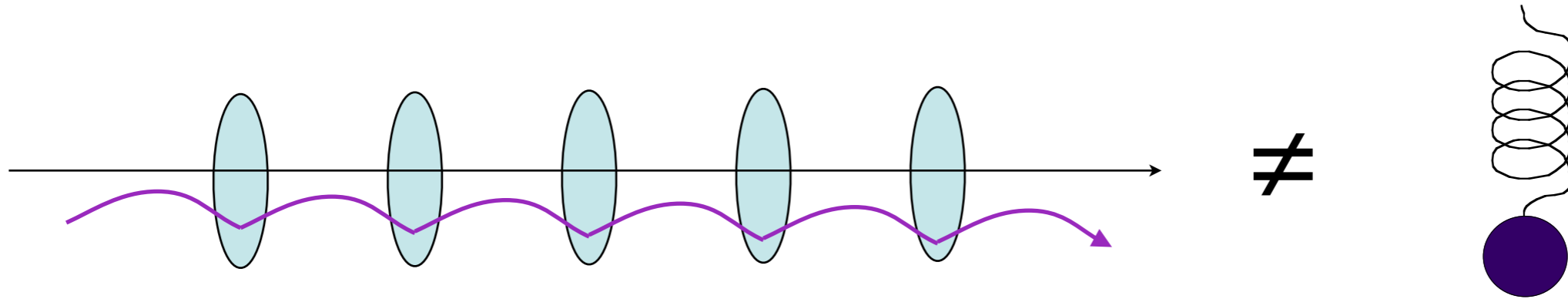
(3) 複素数四つ組

不安定

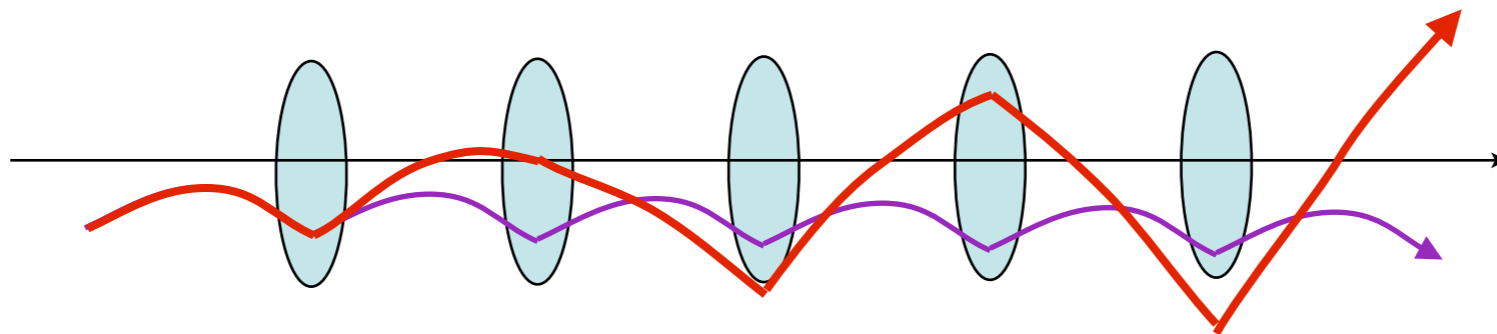
- レンズによるビームの収束は、バネとおもりに一見似ている。



- しかし、ビームの収束は常に離散的(収束力が一様でない)であるため、バネの場合とは本質的な違いがある。



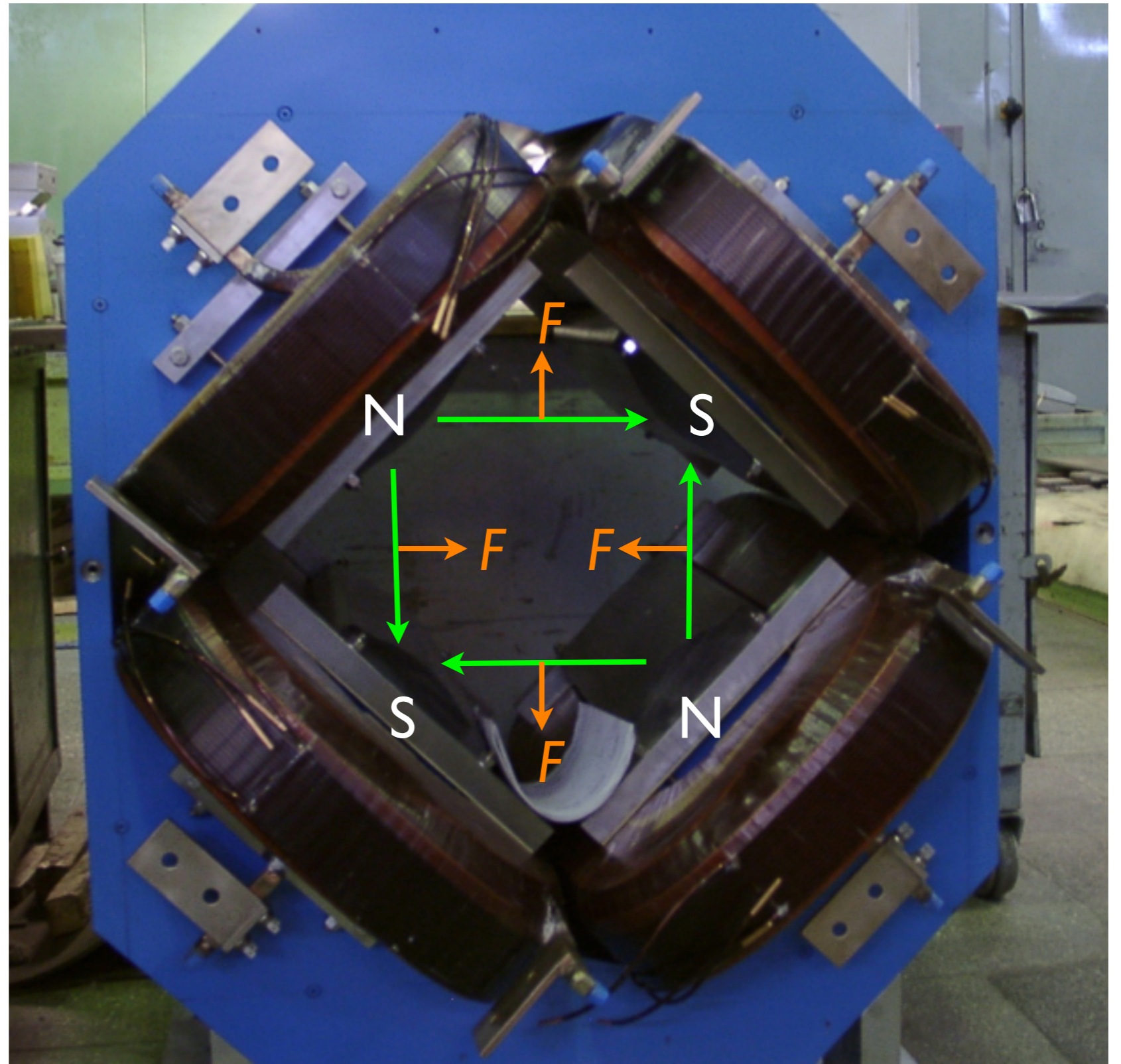
- バネの場合は収束力をどんなに強くしても安定。ただバネの伸びが減るだけ。
- 離散的な収束の場合は、収束力を強くしていくと、いずれビームは発散してしまう。1次元共鳴。



ビームの収束は非一様にならざるを得ない

収束レンズ
(4極電磁石)

ひとつのレンズでは、
水平方向に収束しようと
すると、垂直方向は
発散する。



- カメラのレンズのように、凸レンズと凹レンズをうまく組み合わせれば、水平・垂直両方向とも同時に収束できる。もちろん非一様な収束。
- 水平・垂直両方向とも一様に収束させようとする
と、収束力は極端に弱くなる(歴史的にはこちらが先に使われた)。



弱収束マシンの典型: Bevatron (LBL)

1次元(線形)共鳴

- いま、リング内の1点に **収束力の摂動** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix}$ が加わったとすると、一周の転送行列は

$$\begin{aligned}
 M' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\frac{1+\alpha^2}{\beta} \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\frac{1+\alpha^2}{\beta} \sin \mu - k(\cos \mu + \alpha \sin \mu) & \cos \mu - \alpha \sin \mu - k\beta \sin \mu \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \mu' + \alpha' \sin \mu' & \beta' \sin \mu' \\ -\frac{1+\alpha'^2}{\beta'} \sin \mu' & \cos \mu' - \alpha' \sin \mu' \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

従って、

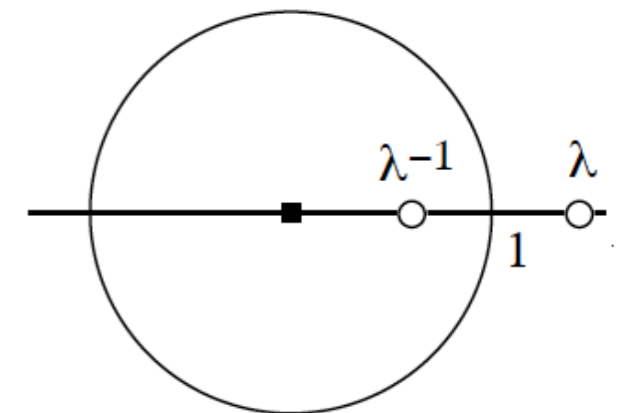
$$\mu' - \mu \approx \frac{k\beta}{2}$$

$$\cos \mu' = \cos \mu - \frac{k\beta}{2} \sin \mu$$

のようにチューンがずれる。しかし、

$$n\pi - 2\Delta < \mu < n\pi, \quad \Delta = \tan^{-1} \frac{k\beta}{2}$$

では解をもたず、不安定になる。

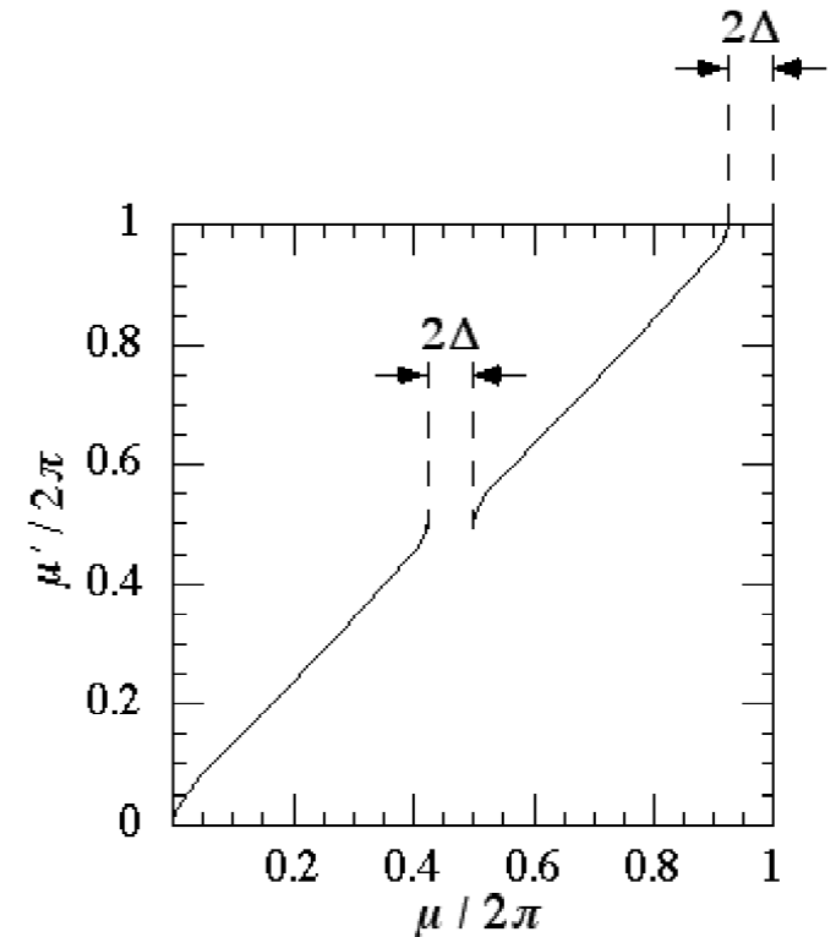


1次元(線形)共鳴(2)

- 右図のように、 $\nu = \mu/2\pi = n/2$ の付近に転送行列が不安定になる領域が発生する(半整数共鳴)。また同時に、

$$\beta' = \beta \frac{\sin \mu}{\sin \mu'}$$

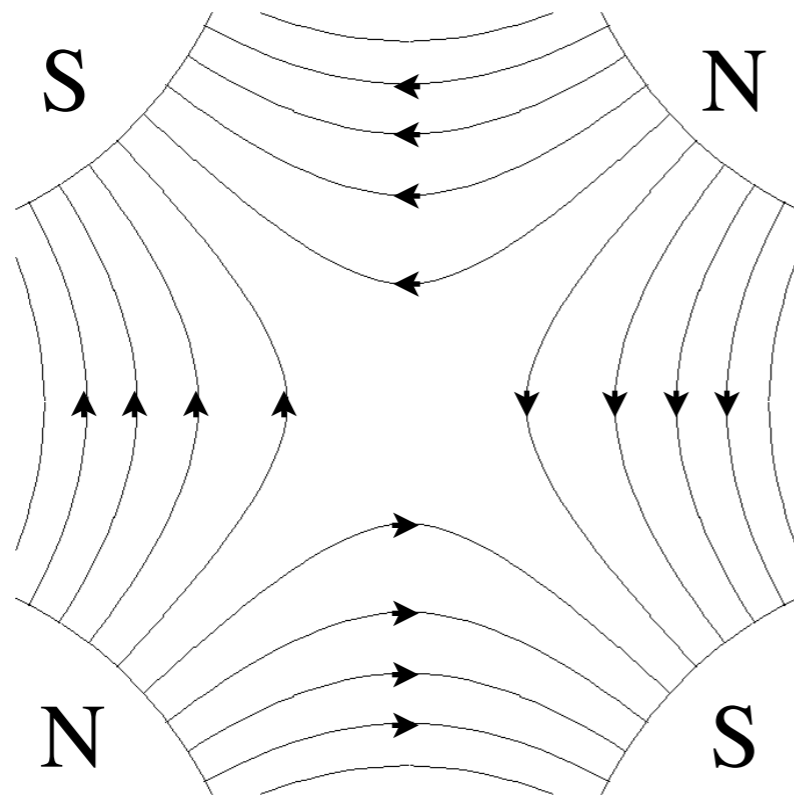
であるから、半整数共鳴付近ではベータ関数も発散する(ビームサイズも増大し、ビームロスにつながる)。



モード間の結合

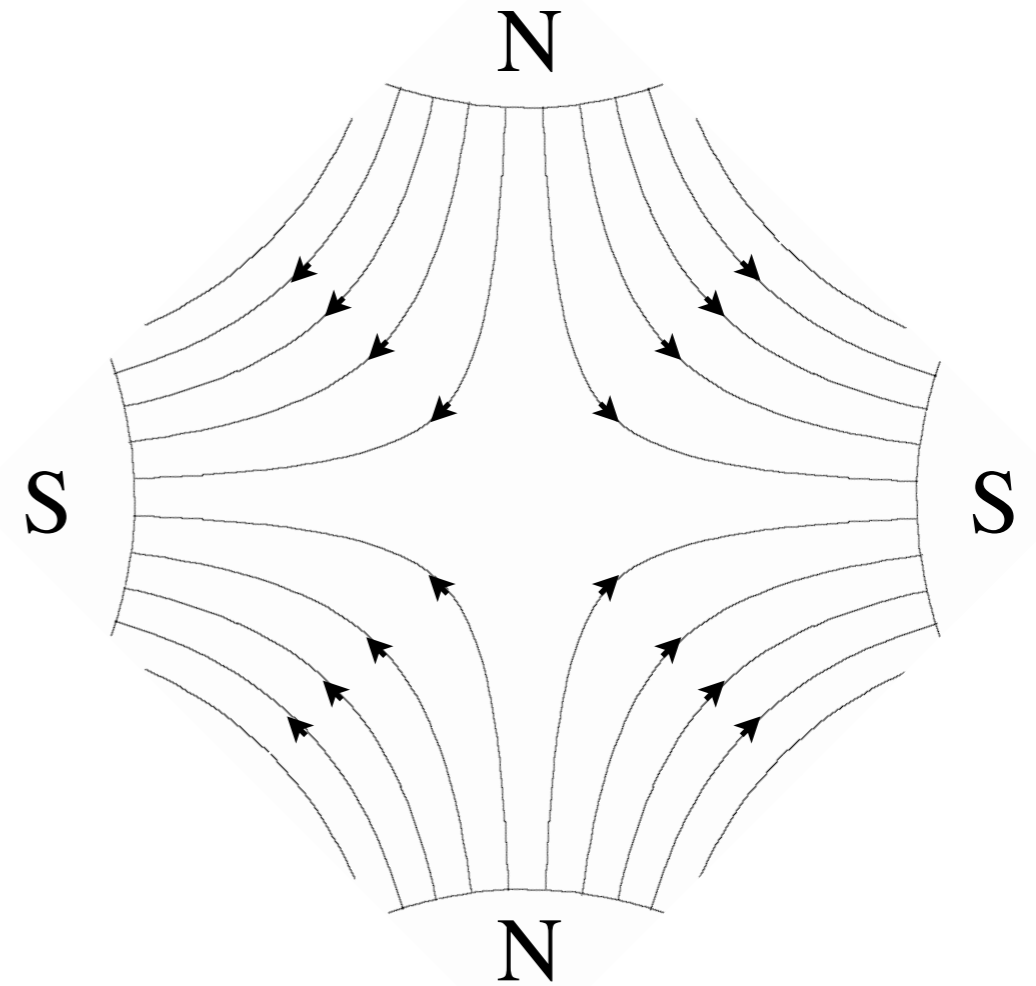
- 例えば四重極レンズを45度回転させた歪(skew)四極レンズや進行方向のソレノイド磁場により、水平方向の運動と垂直方向の運動が混ざる。

四極



$$B_y = -K_1 x$$
$$B_x = -K_1 y$$

歪四極



$$B_x = K_1 x$$
$$B_y = -K_1 y$$

モード間の結合(2)

- 基準座標、Twiss parameter、エミッタンスは2n行2n列の転送行列の場合にも拡張可能である。
- 一般のシンプレクティック行列は以下のように2行2列に区分対角化可能である。

$$M = U_2^{-1} D U_1$$

非結合変数から物理変数
へ出口で戻す

区分対角行列
非結合変数の運動

物理変数から非結合変数
へ入口で変換

- ここで U_2, U_1 もシンプレクティック行列である。
- U_2, U_1 の選択は一意的ではない。
- U_2, U_1 はカップリングとか分散と呼ばれることが多い。
- こうして決められた**非結合モードごとにエミッタンスが保存**する。

4行4列の周期条件

- ・ リング内の1点で、一周の転送行列を非結合にする:

$$M = U^{-1}DU$$

- ・ Uとして、次の形をとることができる(以下2行2列表記):

$$U = \begin{pmatrix} aI & J^t R J \\ R & aI \end{pmatrix}, \quad a^2 + \det R = 1$$

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}, \quad J^t R J = \begin{pmatrix} -R_4 & R_2 \\ R_3 & -R_1 \end{pmatrix}.$$

- ・ Uは symplectic。 ${}^t U J U = J$ 。
- ・ このR(SAD)には dimension があるので、不便な場合もある。 $\beta_{x,y}$ で規格化した量が使われる場合もある。

4行4列の周期条件(2)

• $M = \begin{pmatrix} P & T \\ S & Q \end{pmatrix}$ とすると、以下のように選べば

$$M = U^{-1}DU$$

$$U = \begin{pmatrix} aI & \bar{R} \equiv J^t R J \\ R & aI \end{pmatrix}, \quad a^2 + \det R = 1$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} aI & -\bar{R} \\ -R & aI \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{s}{a\sqrt{d}}(J^t T J - S)$$

$$s = \text{sgn}(\text{Tr}P - \text{Tr}Q)$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{|\text{Tr}P - \text{Tr}Q|}{\sqrt{d}} \right)}$$

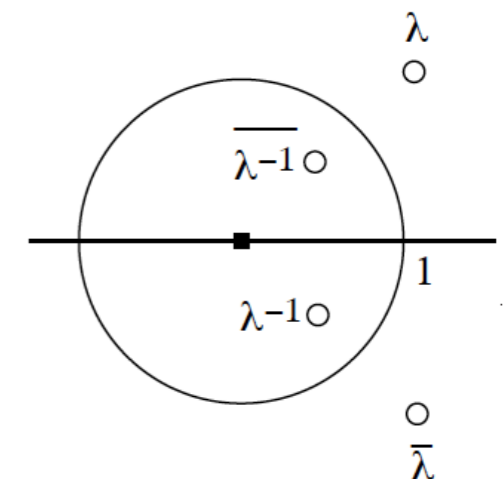
$$d \equiv 8 \det S + 4 \text{Tr}(ST) + (\text{Tr}P - \text{Tr}Q)^2$$

実際、非結合モードの転送行列 $D = U M U^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ が得られる:

$$A = P + \frac{s}{a^2 \sqrt{d}} ((\det S)I + TS)$$

$$B = Q - \frac{s}{a^2 \sqrt{d}} ((\det S)I + ST)$$

$$d = (\text{Tr}A - \text{Tr}B)^2$$



• $d < 0$ の場合は四つ組固有値に対応し、周期解がない。

4行4列の周期条件(3)

・ 証明: $\bar{X} \equiv J^t X J$ とすると、

$$\begin{aligned} X\bar{X} &= \bar{X}X = -|X|I, \quad X - \bar{X} = (\text{Tr}X)I, \\ \overline{\bar{X}} &= X, \quad \overline{(XY)} = -\bar{Y}\bar{X} \end{aligned}$$

であり、M の symplectic 条件 $J^t M J M = \bar{M} M = -I$ から、

$$\begin{aligned} |P| &= |Q|, \quad |S| = |T|, \quad |P| + |T| = |Q| + |S| = 1, \\ \bar{P}T + \bar{S}Q &= 0, \quad Q\bar{T} + S\bar{P} = 0, \text{ etc.} \end{aligned}$$

が得られる。そこで例えば UMU^{-1} の左下の 2 行 2 列の成分

$$f = a^2 S + a(RP - QR) - RTR$$

に対しては $R = x(\bar{T} - S)$ とすると、 $|R| = -\bar{R}R = -x^2(\text{Tr}ST + 2|S|) = 1 - a^2$ から、

$$f = a^2 S - ax(\text{Tr}P - \text{Tr}Q)S - x^2(\text{Tr}(ST) + 2|S|)S = (2a^2 - 1)S - ax(\text{Tr}P - \text{Tr}Q)S = 0$$

が得られる。ここから、 $x = \frac{2a^2 - 1}{a(\text{Tr}P - \text{Tr}Q)}$ および

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{|\text{Tr}P - \text{Tr}Q|}{\sqrt{d}} \right)}, \quad d \equiv 8 \det S + 4 \text{Tr}(ST) + (\text{Tr}P - \text{Tr}Q)^2$$

が得られる。他の成分も同様。

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} P & T \\ Q & S \end{pmatrix} = U^{-1} D U \\ U &= \begin{pmatrix} aI & \bar{R} \equiv J^t R J \\ R & aI \end{pmatrix}, \quad a^2 + \det R = 1 \\ U^{-1} &= \begin{pmatrix} aI & -\bar{R} \\ -R & aI \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

モード間結合による(線形)共鳴(2)

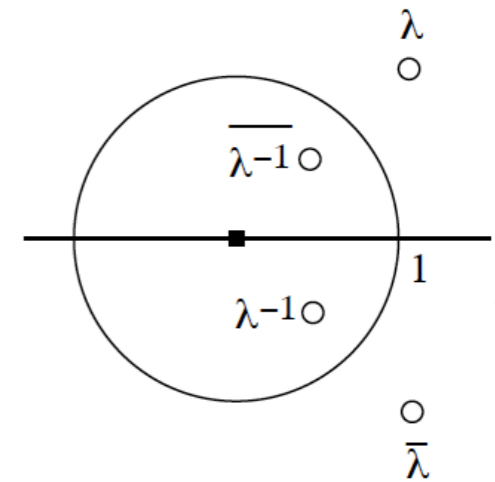
- このとき、前述の安定性の判別式 $d \equiv 8 \det S + 4\text{Tr}(ST) + (\text{Tr}P - \text{Tr}Q)^2 > 0$ は

$$\det S = 0, \quad \text{Tr}(ST) = k^2 \beta_x \beta_y s_x s_y, \quad \text{Tr}P = 2c_x, \quad \text{Tr}Q = 2c_y,$$
$$d = 4(c_x - c_y)^2 + 4k^2 \beta_x \beta_y s_x s_y > 0$$

となるが、 d は $c_x \approx c_y$, $s_x s_y < 0$ の時負になり、固有値は四つ組になる。それは

$$\mu_x + \mu_y \approx 2n\pi$$

の場合に起こる(和共鳴 sum resonance)。

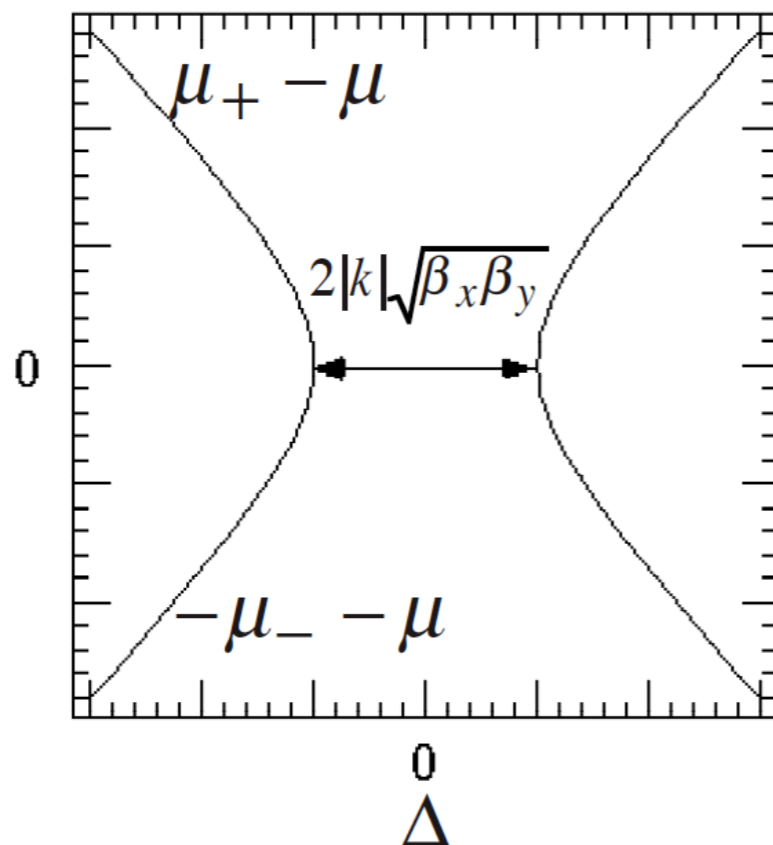


- $\mu_x - \mu_y \approx 2n\pi$ の時(差共鳴 difference resonance)は、モード間の結合は起こるが、運動は安定である。

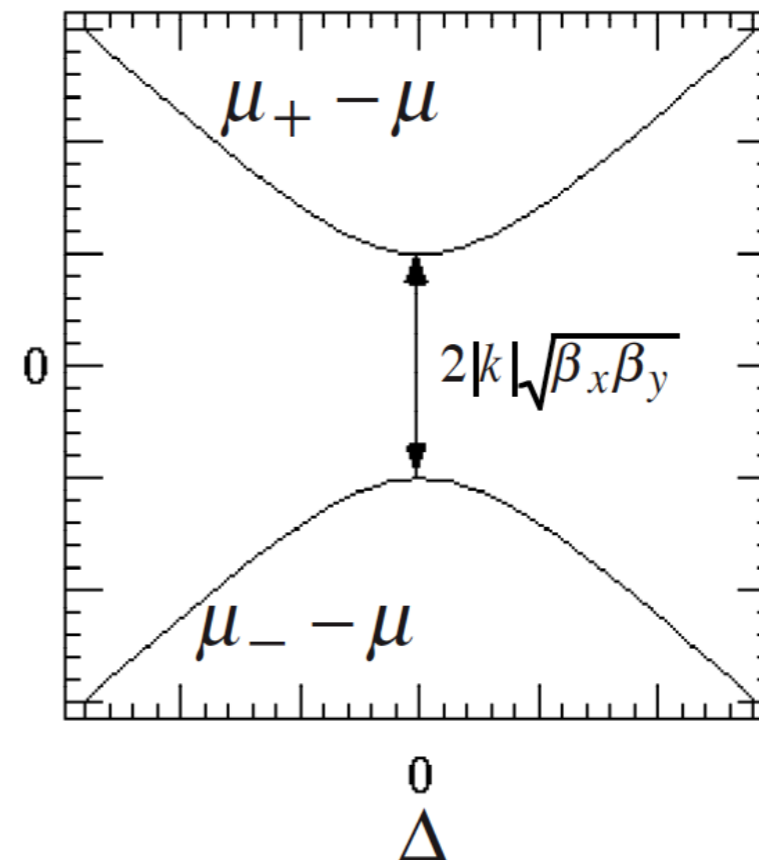
モード間結合による(線形)共鳴(3)

- 和共鳴付近のチューン:

$$\mu_+ = \mu + \sqrt{d(\Delta)}, \quad \mu_- = 2n\pi - \mu + \sqrt{d(\Delta)}, \quad \Delta \approx |k| \sqrt{\beta_x \beta_y}$$



和共鳴では摂動前のチューンが共鳴線に達しないうちに共鳴条件に落ちる。



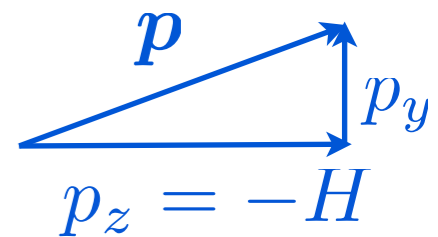
差共鳴ではふたつのチューンが一致する事はない。

非線形共鳴

- ビームラインの中のほとんどすべての要素は非線形変換である (自由空間でさえも)。
- 長さ 2ℓ の自由空間の最低次の非線形項(とりあえずy方向のみを考える):

$$H = -\sqrt{p_t^2/c^2 - m^2c^2 - p_y^2} \approx -p + \frac{p_y^2}{2p} + \frac{p_y^4}{8p^3}$$

$$\exp\left(:\frac{p_y^4}{4p^3}\ell:\right), \quad (p = \sqrt{p_t^2/c^2 - m^2c^2})$$



- 基準変数でのリング一周の変換は

$$\exp\left(:\frac{kp_u^4}{4}:\right)L(\mu), \quad (k = \ell/\beta_y^{*2}p^3)$$

となる。 $L(\mu)$ はチューン μ の線形変換。

指数演算子によるシンプレクティック変換の表現

- いま s をあからさまには含まないハミトニアン H が $s = 0$ から $s = \ell$ まで作用したとする。ある関数 f の $s = \ell$ での値は Taylor 展開により

$$f = f_0 + f'_0 \ell + \frac{1}{2} f''_0 \ell^2 + \dots$$

と表されるが、一般に

$$[f, H] = J_{ij} \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial q_j} = \frac{\partial f}{\partial q_i} q'_i = f'$$

であるから、今 Poisson 括弧を作用させる演算子を

$$: A : f \equiv [f, A]$$

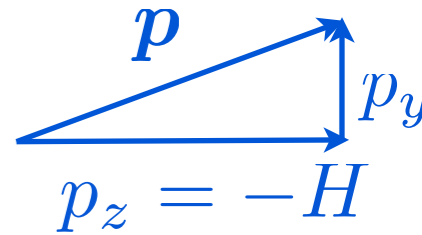
と定義すれば、

$$f = \left\{ f + [f, H] \ell + \frac{1}{2} [[f, H], H] \ell^2 + \dots \right\}_{s=0} = \underline{\exp(: H \ell :) f}_{s=0}$$

と書ける。

非線形共鳴(2)

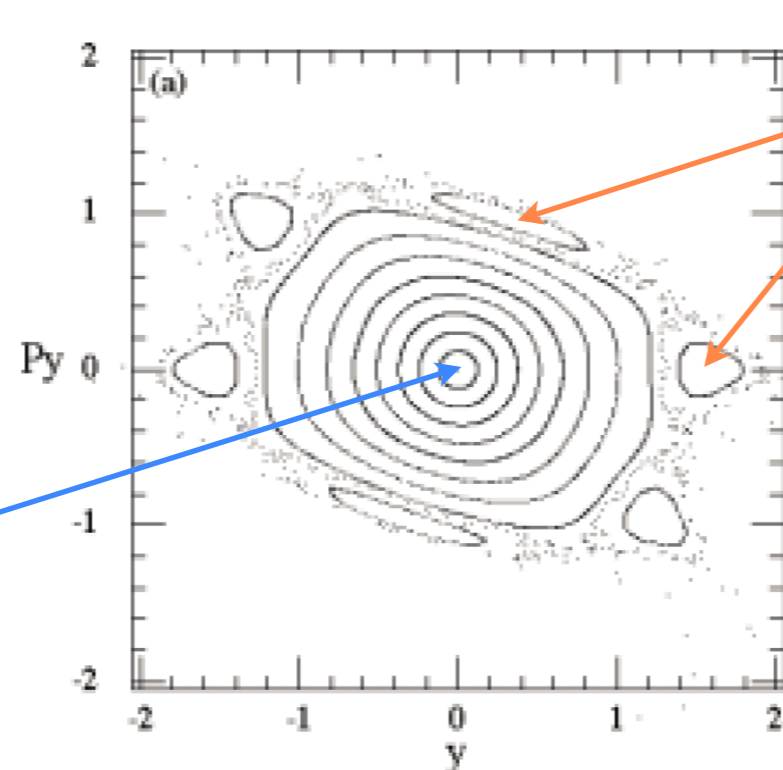
- この自由空間の非線形性は、振幅が増えるほど距離が長くなることに対応する。



- したがって、振幅が増えるほど、ベータトロン振動数が増加する。
- そこで、ある振幅でベータトロン振動数が共鳴条件を満たすことになる:

$$\mu(J_y) = \mu_0 + \Delta\mu(J_y) = \frac{n}{m} \times 2\pi$$

$$\mu_0/2\pi = 0.105$$

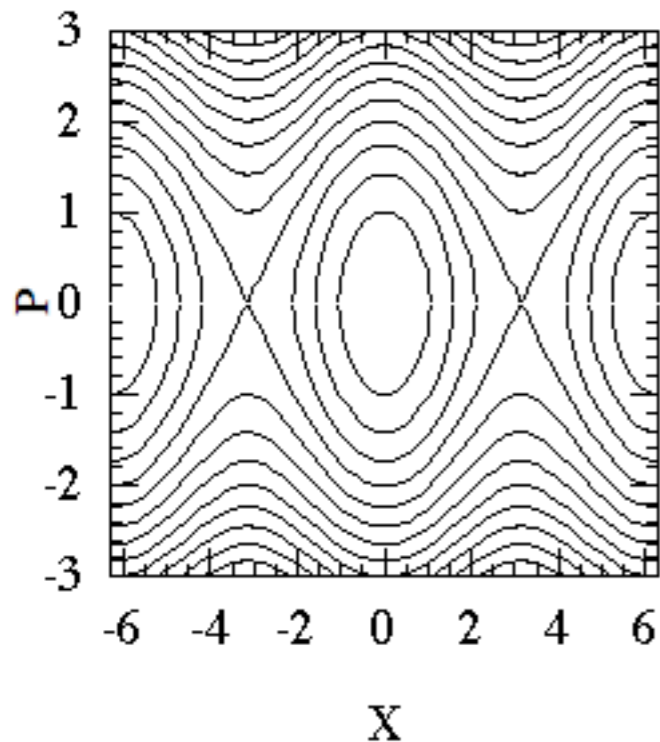


$$\mu/2\pi = 1/6 = 0.16666$$

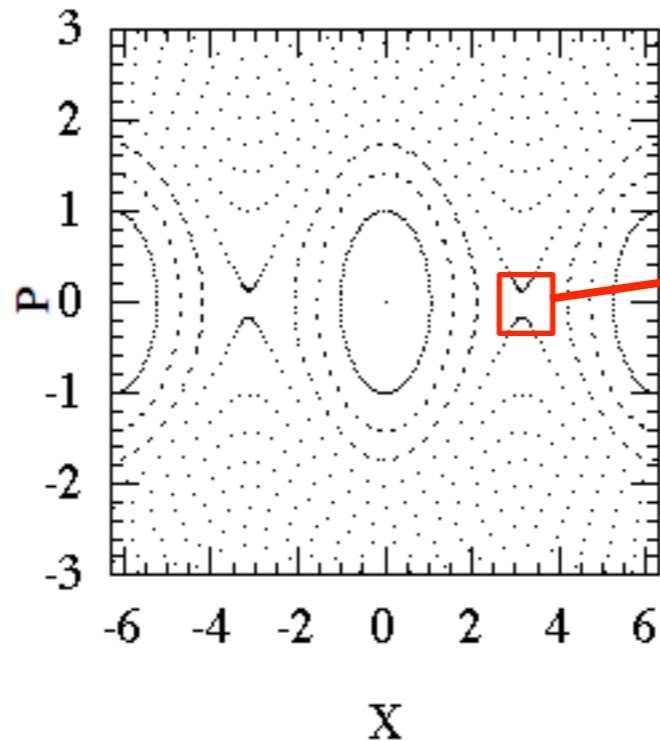
・ 共鳴の次数と非線形力の次数は関係ない。

一様でない非線形性によるカオス

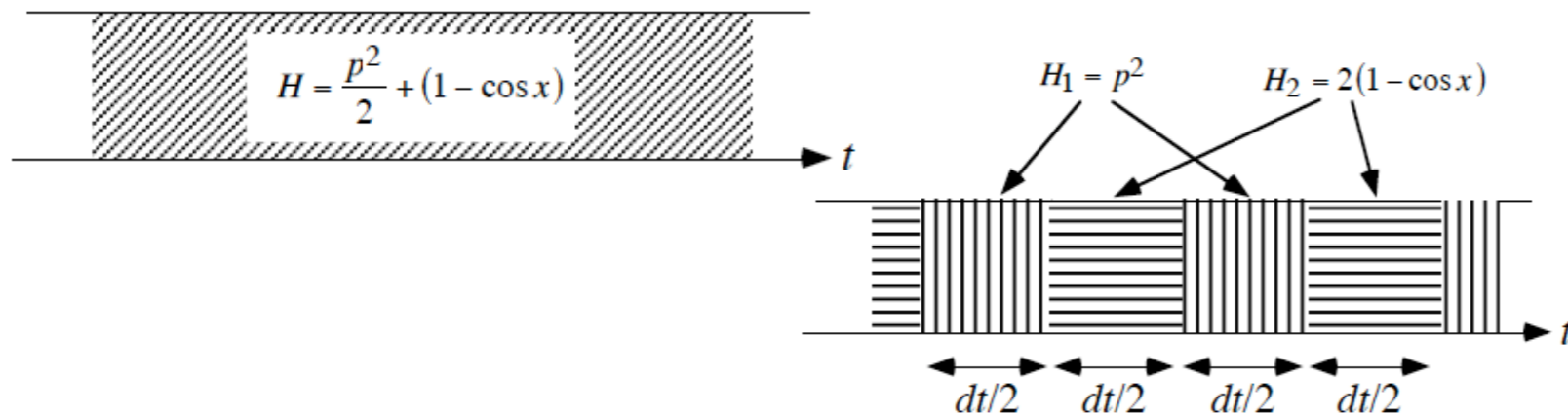
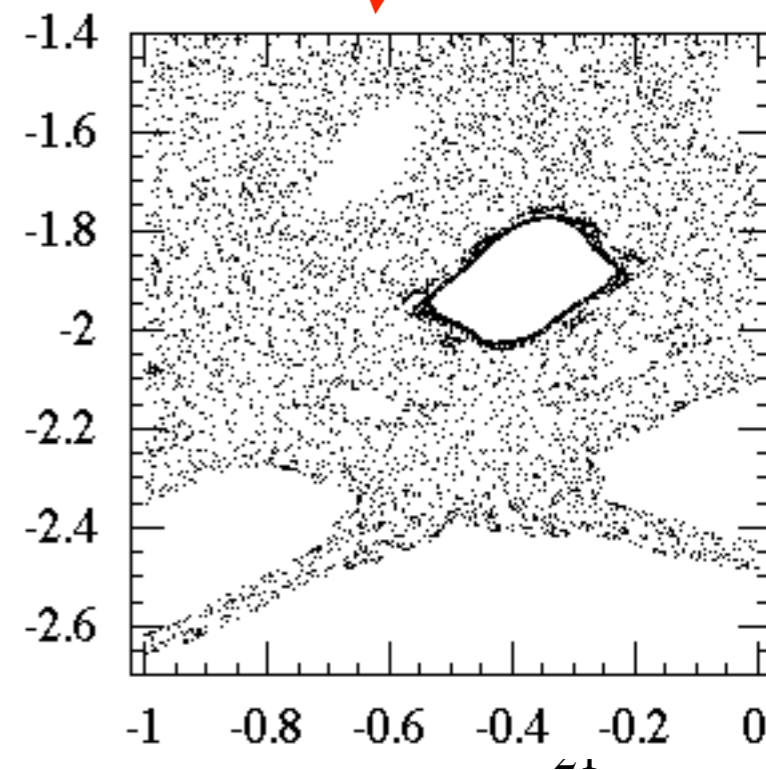
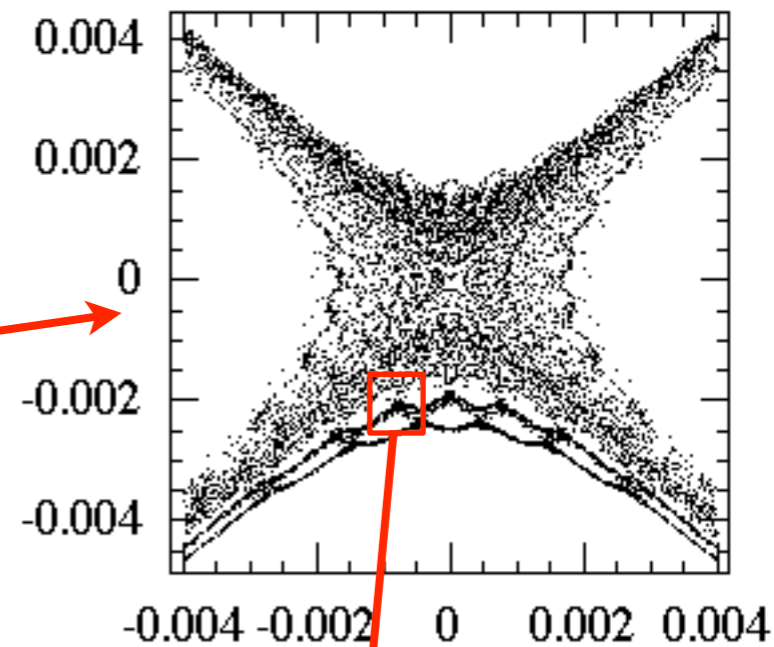
位相空間



連続振り子



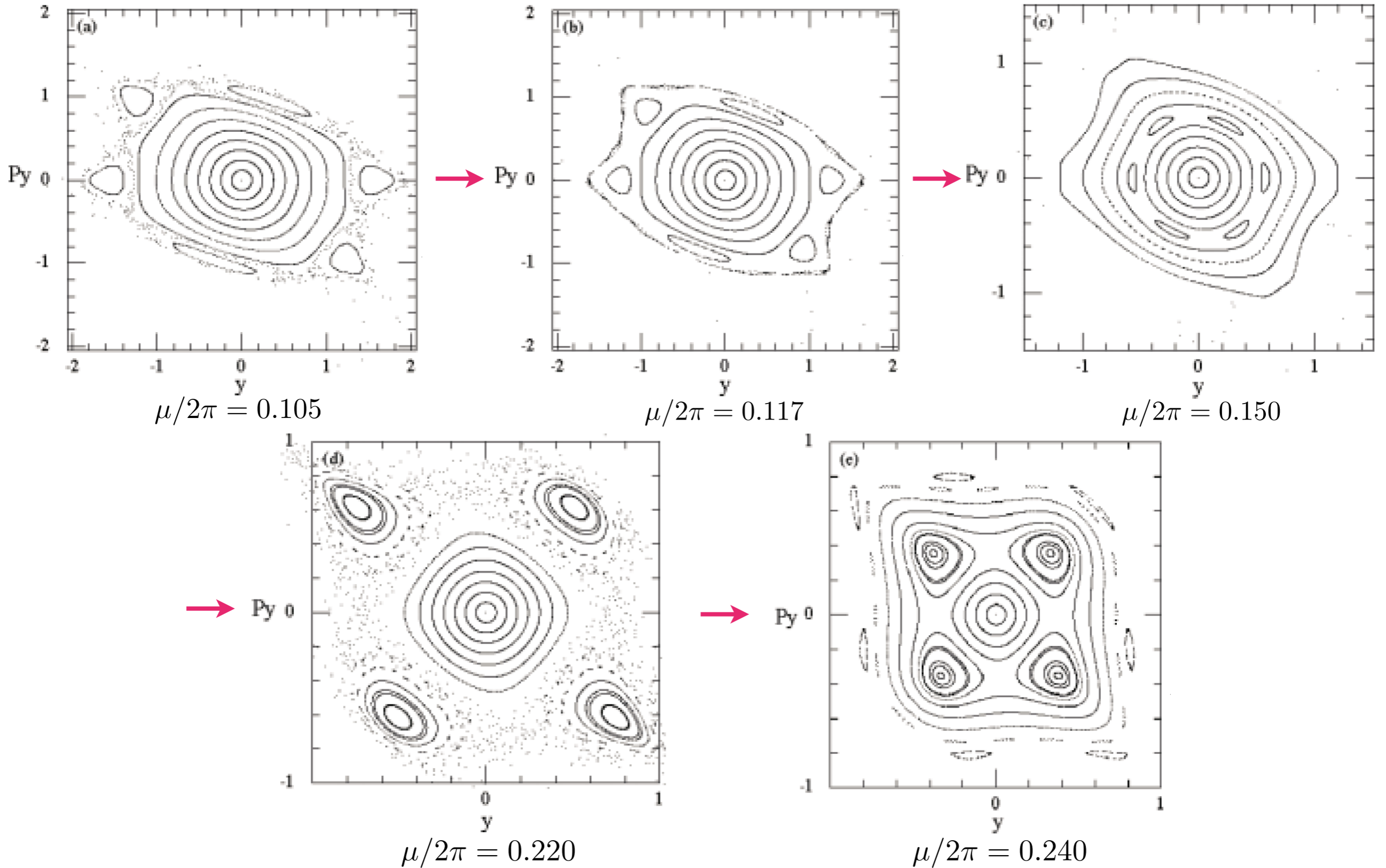
非一様振り子



同様の現象が加速器のビームでは起こりうる

非線形共鳴(3)

- この非線形項による位相空間をいくつかの μ に対して見る:

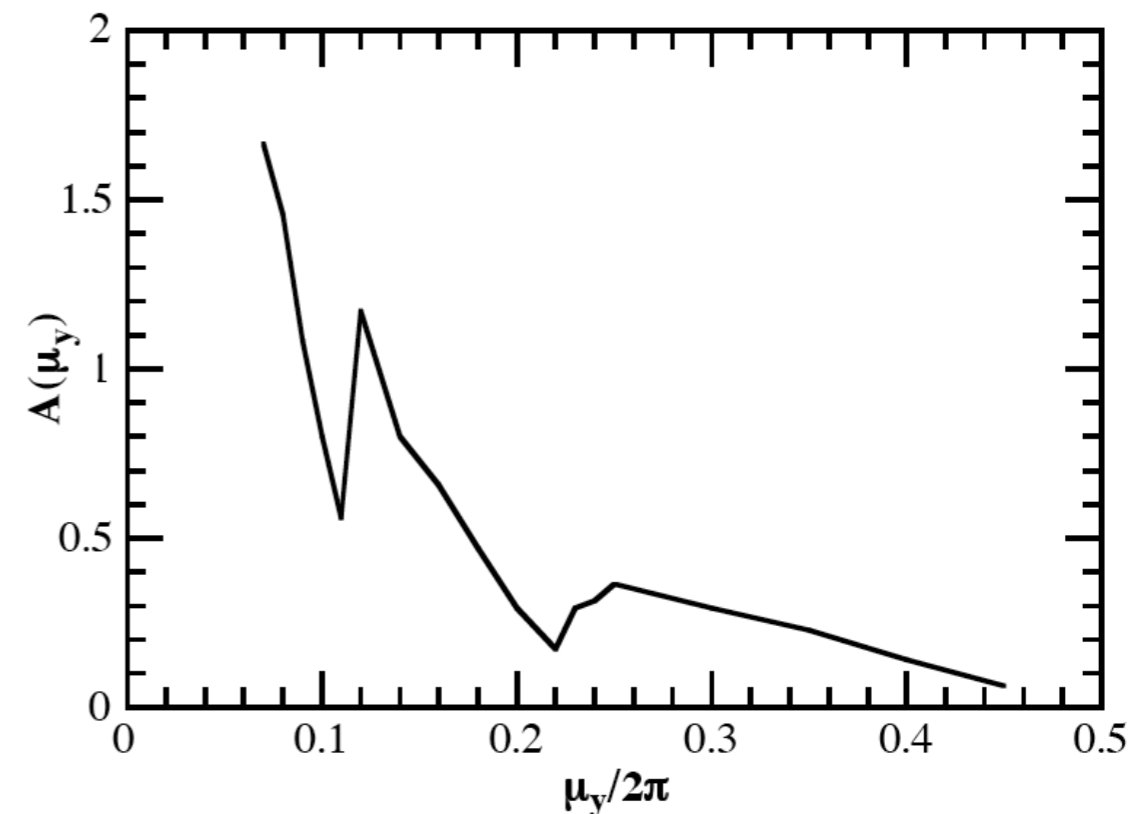


力学口径

- 以上のような非線形共鳴により、最も単純なドリフト空間の非線形性でもビームの安定領域が制限される。

$$J_y \leq \frac{A(\mu_y)}{k} = \frac{\beta_y^{*2}}{\ell} A(\mu_y)$$

- リング内にビームを強く収束する場所(β_y^* が小さい)をつくると安定域が狭くなる。
- より高次のあるいは多自由度の非線形項で力学口径はさらに狭くなる。
- 力学口径を解析的に求めるのは困難

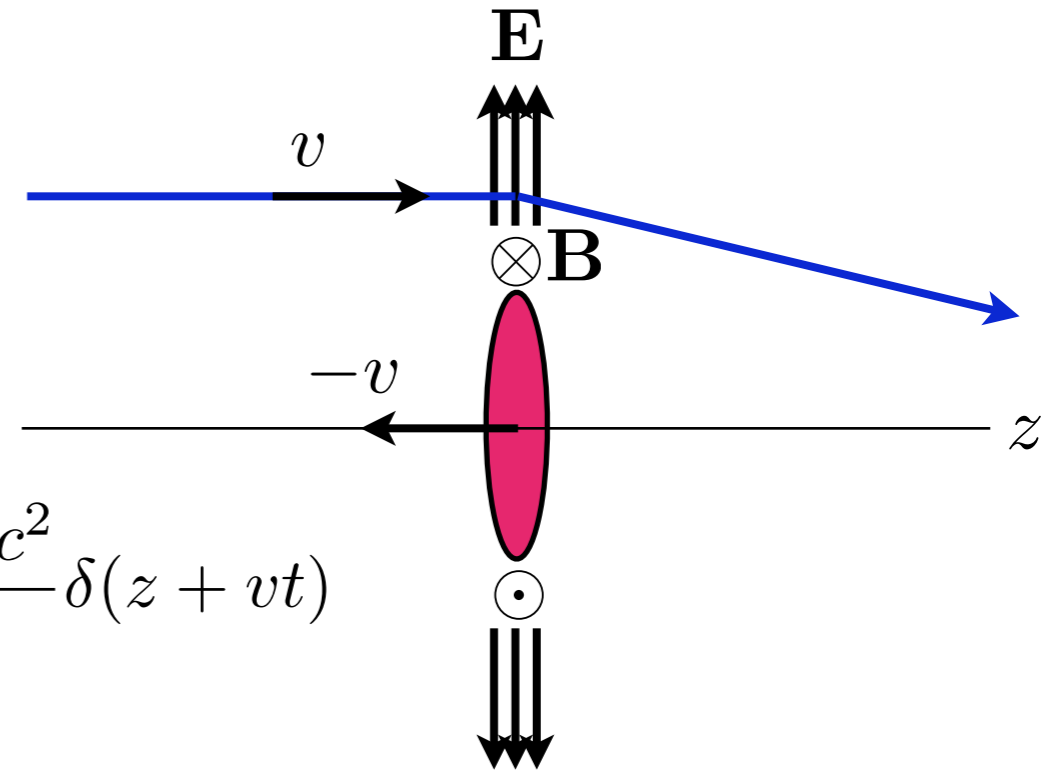


非線形共鳴の例(ビーム・ビーム相互作用)

- $v \approx c$ の場合、相手のビームの電磁場は横方向の成分が支配的。
- 相手が点電荷の場合:

$$E_r = \frac{e}{2\pi\epsilon_0 r} \delta(z + vt), \quad B_\varphi = -\frac{v}{c^2} E_r$$

$$F_r = -e(E_r - vB_r) \approx -\frac{e^2}{\pi\epsilon_0 r} \delta(z + vt) = -\frac{4r_e mc^2}{r} \delta(z + vt)$$



- 相手から受け取る運動量:

$$\Delta p_r = \int_{-\infty}^{\infty} F_{r,z=vt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{4r_e mc^2}{r} \delta(2vt) dt \approx -\frac{2r_e mc}{r}$$

$$\Delta \left(\frac{p_r}{\gamma mc} \right) = -\frac{2r_e}{\gamma r}$$

受け取る運動量は2次元の静電場に比例する

ビーム・ビーム相互作用(2)

- 相手のビームに分布がある場合:

$$f_{x,y} = \Delta \left(\frac{p_{x,y}}{\gamma mc} \right) = -\partial_{x,y} \phi$$

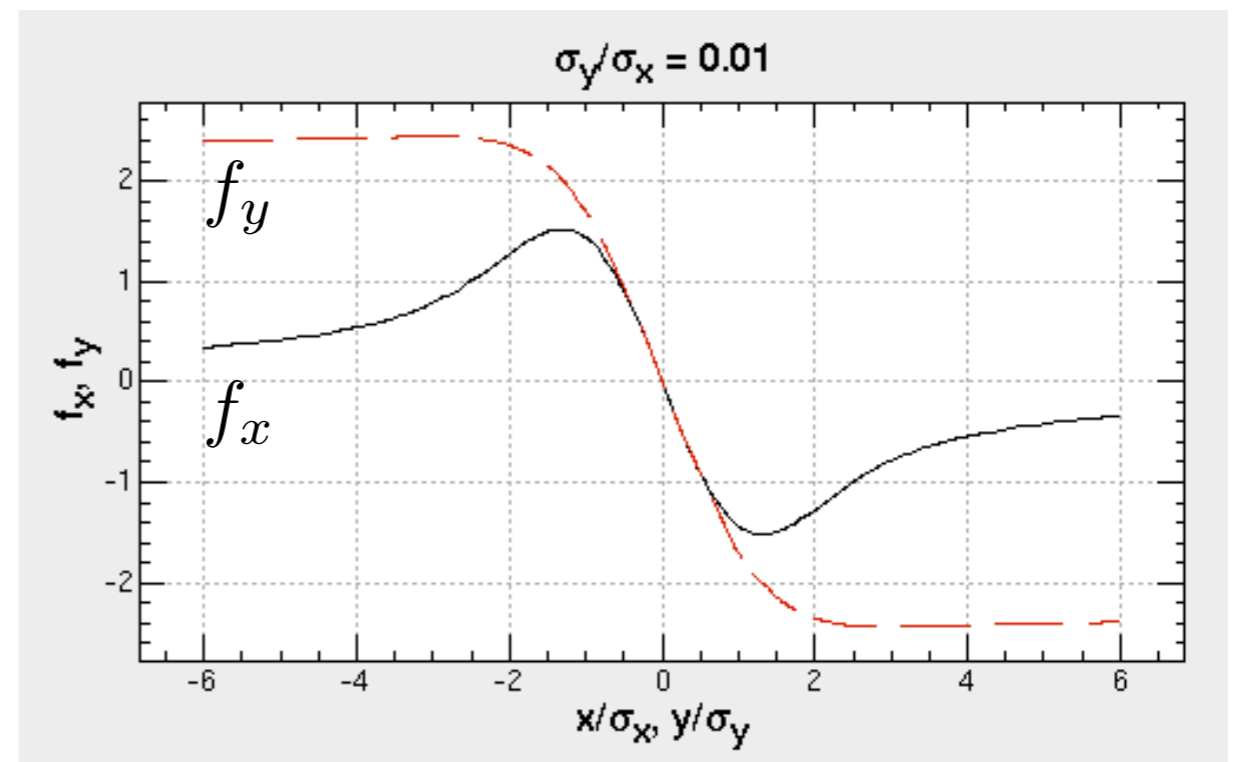
$$\phi = \int \frac{r_e}{\gamma} \log \left((x - x')^2 + (y - y')^2 \right) \rho(x', y') dx' dy'$$

- 分布がGaussianの場合:

$$f_x + if_y = -\frac{Nr_e}{\gamma} \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}} \left[w \left(\frac{x + iy}{\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}} \right) - \exp \left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right) w \left(\frac{\frac{\sigma_y}{\sigma_x} x + i \frac{\sigma_x}{\sigma_y} y}{\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}} \right) \right]$$

$$w(z) \equiv \exp(-z^2) \{1 - \operatorname{erf}(-iz)\}$$

(complex error function)

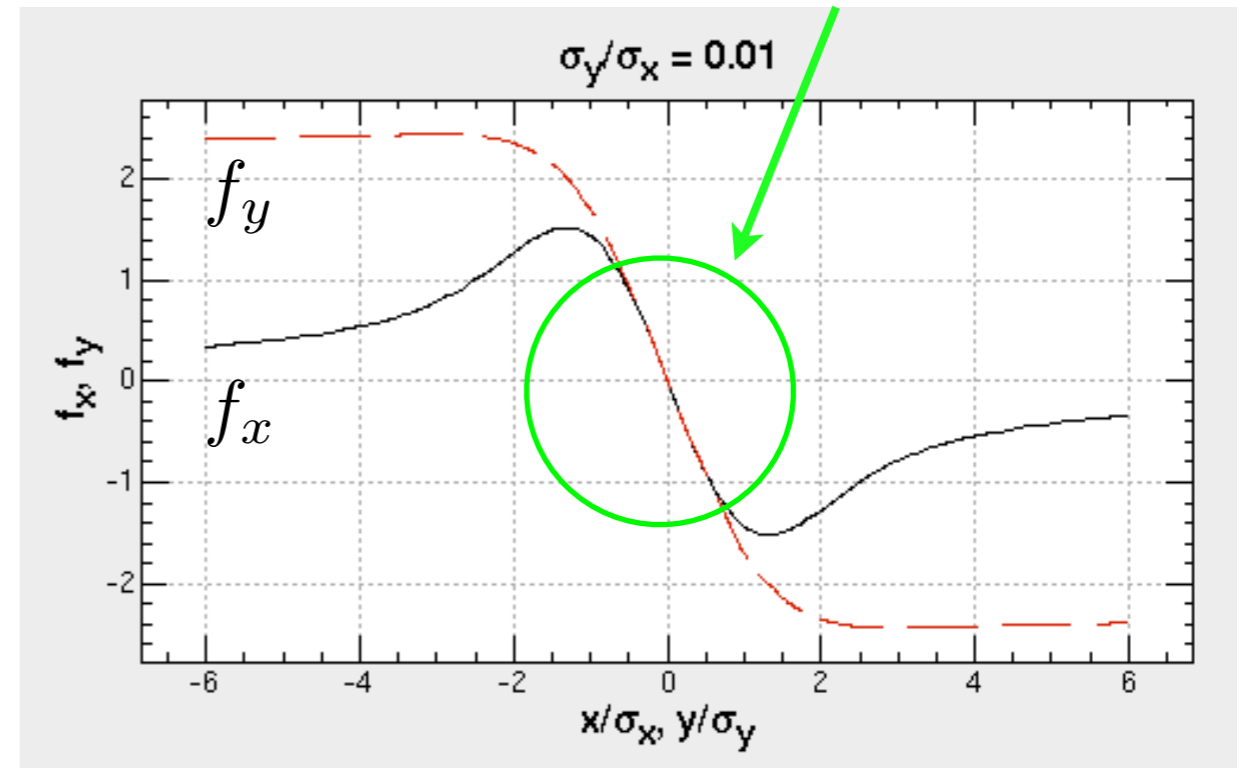


ビーム・ビーム相互作用(3)

- 原点付近 ($|x/\sigma_x|, |y/\sigma_y| \leq 1$) では力は変位にほぼ比例。

- 収束(発散)レンズの強さ:

$$k_{x,y} = \frac{2Nr_e}{\gamma\sigma_{x,y}(\sigma_x + \sigma_y)}$$



- ビーム・ビーム・チューンシフト・パラメータ:

$$\xi_{x,y} = \frac{k_{x,y}\beta_{x,y}^*}{4\pi} = \frac{Nr_e}{2\pi\gamma} \frac{\beta_{x,y}^*}{\sigma_{x,y}(\sigma_x + \sigma_y)}$$

$$\xi_{x,y} \lesssim 0.1$$

ビーム・ビーム相互作用の大きさを表す

ビームの中心付近のベータatron振動数のチューンの変化に対応する量であるが、チューンの変化そのものが問題ではなく、ビーム・ビーム相互作用の非線形性が問題である。

(参考) 空間電荷効果

- 粒子は自分のビームからも力を受ける。
- ビームが線上電荷(線密度 λ)の場合:

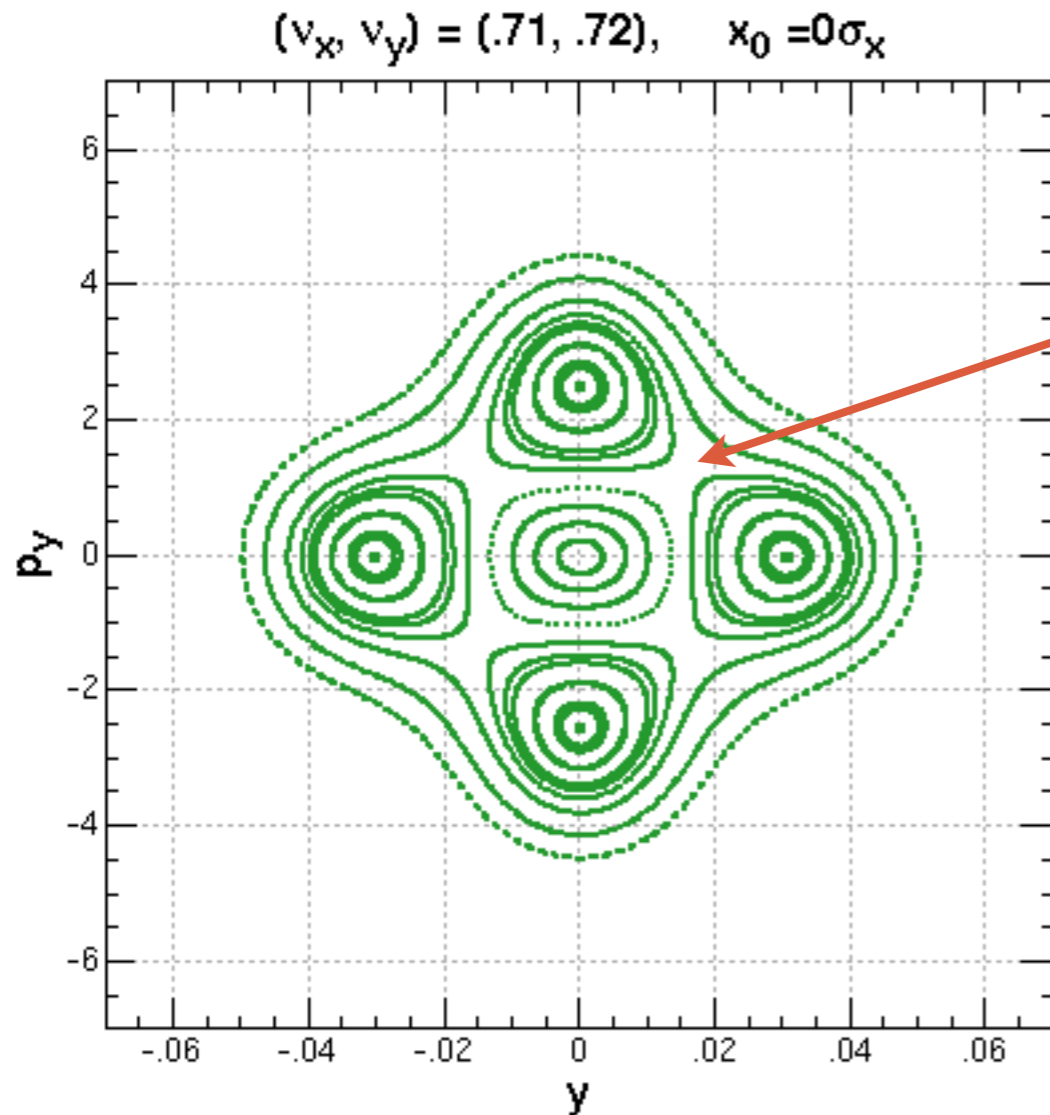
$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad B_\varphi = +\frac{v}{c^2} E_r$$
$$F_r = e(E_r - vB_r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

- $v \rightarrow c$ では空間電荷効果は急激に弱くなる。
- ビーム・ビーム効果と異なり、ビームラインに沿って滑らかに作用する。
- 従って比較的大きなチューン・シフトまで許容できる。

$$\xi_{x,y} \gtrsim 0.25$$

ビーム・ビーム相互作用(4)

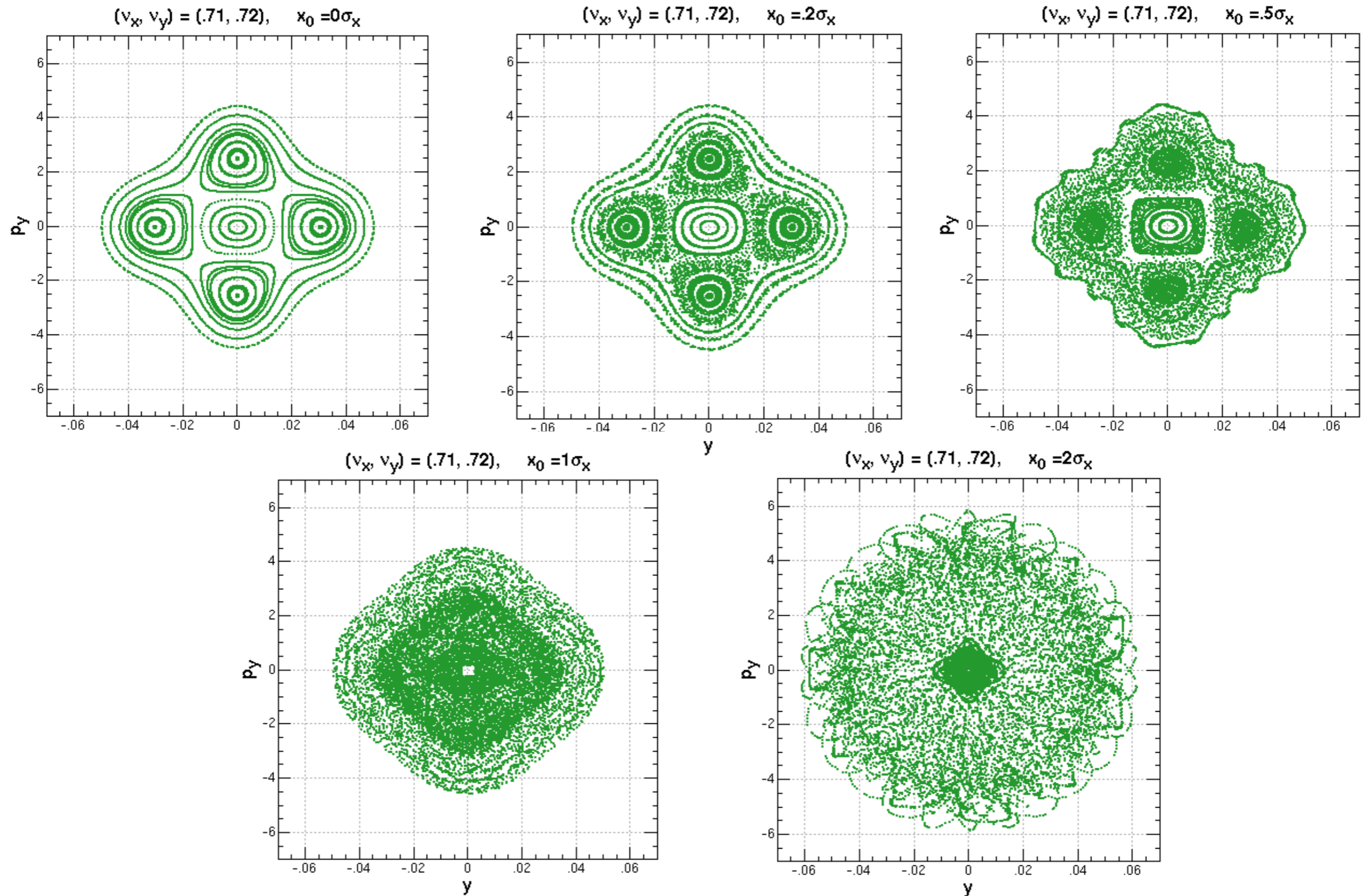
- 時間(s)依存の1自由度の非線形性の場合にはchaosが発生しても、運動はあるnear-integrable surface(KAM surface)に閉じ込められる。



不安定平衡点の付近にはchaosが発生するが、周囲のKAM surfaceに囲まれているので振幅の発散は有界。

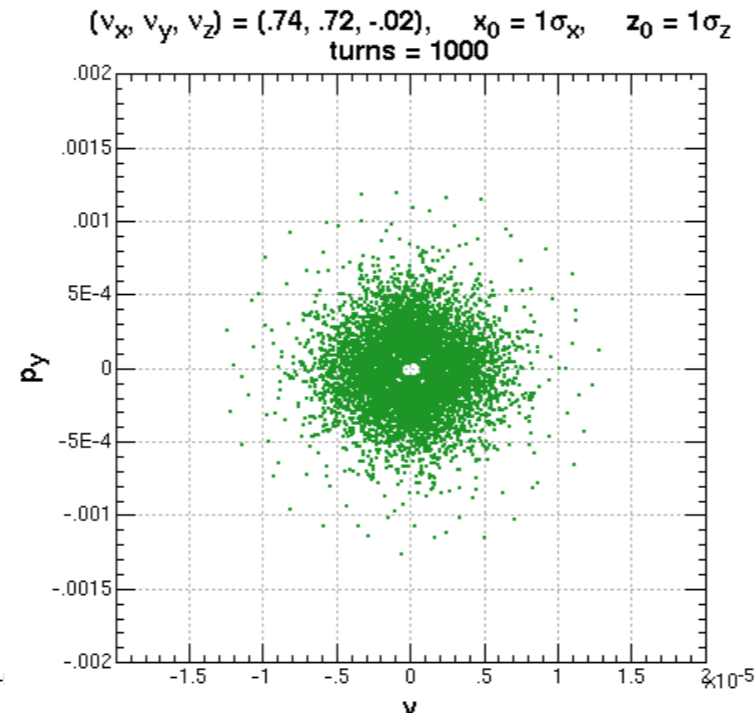
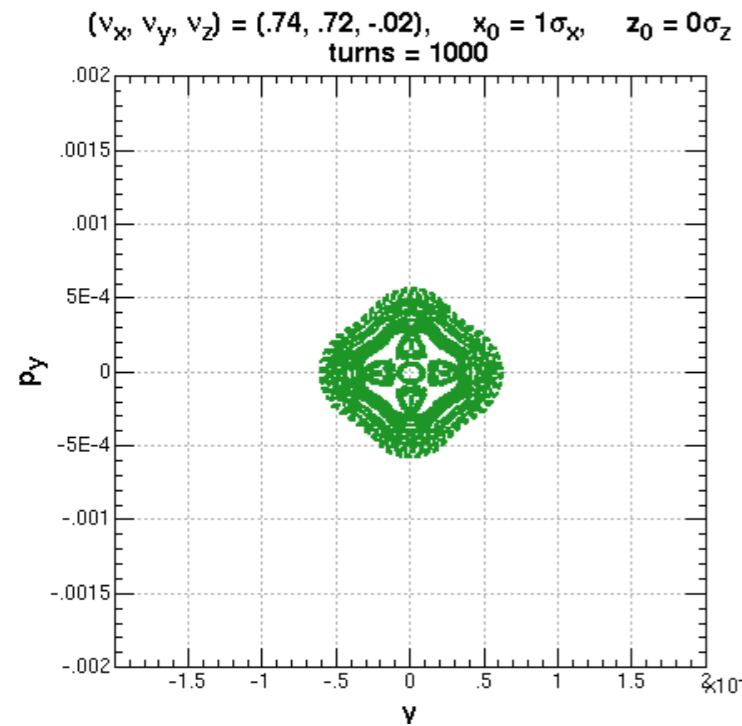
ビーム・ビーム相互作用(5)

- 他の自由度(x)の振幅が増すとKAM surfaceは崩される:



ビーム・ビーム相互作用(6)

- 粒子の進行方向の位置(到着時刻)が変わると、相手のビームと衝突する場所も変わる: synchrotron-betatron結合。



$$\begin{aligned}\sigma_x/100 &= \sigma_y = 1\mu\text{m} \\ \beta_x^*/100 &= \beta_y^* = 1\text{cm} \\ \sigma_z &= 5\text{mm}, \sigma_\delta = 0.1\% \\ \xi_x &= \xi_y = 0.05\end{aligned}$$

振幅の拡散

